

Eléments de théorie des matroïdes et matroïdes orientés *

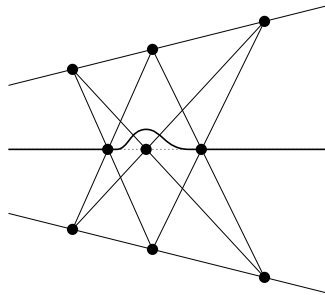
Emeric Gioan

Jorge Ramírez Alfonsín

Un matroïde - mot dérivé de "matrice" - est une structure combinatoire qui peut être définie en retenant les principales propriétés ensemblistes de la dépendance linéaire dans les espaces vectoriels. Lorsqu'il est associé à un ensemble fini de points, il capture les relations d'incidence (alignement, coplanarité, etc.) entre ces points.

Un matroïde orienté est une structure combinatoire proche qui capture - en plus - les relations de convexité entre ces points, en prenant cette fois en compte les signes dans les relations de dépendance linéaire. En toute généralité, il correspond à un objet topologique : un arrangement de pseudosphères.

Les matroïdes et les matroïdes orientés satisfont de nombreuses axiomatiques équivalentes, possèdent une notion fondamentale de dualité, et fournissent un cadre adéquat pour des notions classiques variées (en théorie des graphes, en optimisation discrète, en géométrie, etc.), ce qui leur confère un caractère très naturel.



*Publié en tant que Chapitre 2 de *Informatique Mathématique - Une photographie en 2013* (Philippe Langlois, ed.), Presses Universitaires de Perpignan, 2013. Financé par le GDR-IM École Jeunes Chercheurs en Informatique Mathématique 2013, et le projet TEOMATRO (ANR-10-BLAN 0207).

1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'introduire la théorie des matroïdes et des matroïdes orientés en présentant les principales propriétés de ces structures et les principaux liens qu'elles ont avec d'autres domaines classiques. Une qualité remarquable de ces structures est d'avoir de nombreuses définitions équivalentes, ayant chacune leur intérêt, et de se situer au confluent de plusieurs structures mathématiques. De ce fait, ce chapitre est davantage conçu comme un guide pratique exposant brièvement des directions variées et reliées entre elles, que comme un cours linéaire et progressif. Il nécessite un prérequis minimal en théorie des graphes et en algèbre linéaire pour ce qui concerne les exemples et applications.

Un matroïde - mot dérivé de "matrice" - est une structure combinatoire qui peut être définie en retenant les principales propriétés ensemblistes de la dépendance linéaire dans les espaces vectoriels. Un matroïde est ainsi naturellement associé à un ensemble fini de points (ou d'hyperplans), et capture les relations d'incidence (alignement, coplanarité, etc.) entre ces points. Cependant les propriétés définissant les matroïdes ne caractérisent pas les ensembles de points : les matroïdes constituent une classe d'objets beaucoup plus vaste. D'autres exemples naturels de matroïdes s'obtiennent à partir de graphes, d'ensembles ordonnés, de corps, d'algorithmes gloutons, de fonctions sous-modulaires, etc., donnant lieu à des applications variées, particulièrement en optimisation discrète.

Un matroïde orienté est une structure combinatoire proche qui capture - en plus - les relations de convexité entre les points en question plus haut, en prenant cette fois en compte les signes dans les relations de dépendance linéaire. Il correspond en toute généralité à un objet topologique : un arrangement de pseudosphères (généralisation d'un ensemble fini d'hyperplans réels dans lequel, grossièrement, les hyperplans peuvent être déformés, courbés). La théorie des matroïdes orientés généralise la théorie des graphes orientés en tant qu'espaces de cycles, constitue une abstraction combinatoire de l'algèbre linéaire réelle, et fournit un langage approprié pour les relations d'incidence, de convexité ou de positions relatives dans divers objets géométriques ou topologiques : modèles 3D, configurations de points, polytopes, arrangements de droites, de pseudodroites, d'hyperplans, de pseudohyperplans...

Les matroïdes et les matroïdes orientés satisfont de nombreuses axiomatiques équivalentes. Ils possèdent une notion fondamentale de dualité (qui généralise de façon combinatoire la dualité des graphes planaires, l'orthogonalité des espaces vectoriels, et la dualité de la programmation linéaire). Et ils fournissent un cadre adéquat pour des notions classiques variées (en théorie

des graphes, telle le polynôme de Tutte auquel sera par exemple consacré une sous-section, en optimisation discrète, en géométrie...). Tout ceci leur confère un caractère très naturel.

Les applications des matroïdes et matroïdes orientés ont d'abord été essentiellement situées en combinatoire et dans des domaines proches, notamment ceux mentionnés dans cette introduction. Depuis une trentaine d'années des applications apparaissent dans des domaines très divers : stratification des grassmanniennes en géométrie algébrique, triangulations en géométrie discrète... Mais ces applications dépassent le cadre de ce chapitre.

Enfin, il faut préciser que les matroïdes et les matroïdes orientés sont des structures distinctes, c'est-à-dire que l'une ne contient pas l'autre : tout matroïde orienté a un matroïde sous-jacent, mais plusieurs matroïdes orientés peuvent avoir le même matroïde sous-jacent, alors que certains matroïdes non-orientables ne sont le matroïde sous-jacent d'aucun matroïde orienté.

Ces deux structures sont présentées respectivement dans les deux sections suivantes. Celles-ci peuvent être lues indépendamment, et des renvois d'une section à l'autre permettent d'approfondir leur relation.

2 Théorie des matroïdes

Le mot *matroïde* apparaît pour la première fois dans l'article fondateur [23] publié par H. Whitney en 1935. Dans cet article la structure de matroïde est introduite comme abstraction ensembliste des relations de dépendance entre les vecteurs colonnes d'une matrice, d'où le suffixe 'oïde' indiquant qu'il s'agit d'une structure proche d'une matrice. Pour approfondir cette théorie, et pour les preuves des résultats de cette section énoncés sans source, nous recommandons le livre de référence [15].

2.1 Axiomatiques

Ces structures peuvent être caractérisées par plusieurs axiomatiques équivalentes. Plus précisément, à un matroïde sont associés plusieurs objets caractéristiques (l'ensemble des indépendants, des circuits, des bases, la fonction rang...), qui satisfont chacun une certaine axiomatique, déterminent chacun le matroïde tout entier, et donc se déterminent mutuellement. Dans la suite nous énonçons ces différentes axiomatiques. Nous faisons aussi le choix (arbitraire) de définir formellement un matroïde par l'ensemble de ses indépendants, et nous relierons les autres notions à celle-ci.

2.1.1 Indépendants

Un *matroïde* M est un couple (E, \mathcal{I}) où E est un ensemble fini (usuellement $E = \{1, \dots, n\}$) et \mathcal{I} est une famille de sous-ensembles de E qui vérifie les conditions suivantes :

- (I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$,
- (I2) Si $I_1 \in \mathcal{I}$ et $I_2 \subset I_1$ alors $I_2 \in \mathcal{I}$,
- (I3) (*propriété d'augmentation*) Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ et $|I_1| < |I_2|$ alors il existe $e \in I_2 \setminus I_1$ tel que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

Les membres de \mathcal{I} sont appelés les *indépendants* de M . Un sous-ensemble de E qui n'est pas dans \mathcal{I} est appelé *dépendant*.

Par exemple, soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ l'ensemble des vecteurs colonnes d'une matrice à coefficients dans un corps \mathbb{F} . Soit \mathcal{I} la famille des sous-ensembles $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\} = E$ tel que l'ensemble des colonnes $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{F} . Alors, (E, \mathcal{I}) est un matroïde. On peut noter la similitude dans ce cas entre la propriété (I3) et le théorème de la base incomplète, fondamental en algèbre linéaire.

Un matroïde qui est isomorphe à un matroïde obtenu à partir d'une matrice sur un corps \mathbb{F} est appelé *représentable* ou *vectoriel* sur \mathbb{F} .

Exemple 2.1. La matrice A suivante donne un matroïde $M(A)$ dont les indépendants forment l'ensemble \mathcal{I} suivant.

$$A = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}.$$

2.1.2 Circuits

Un sous-ensemble $X \subseteq E$ est dépendant minimal (pour l'inclusion) si tout sous-ensemble de X distinct de X est indépendant. Un sous-ensemble dépendant minimal d'un matroïde M est appelé *circuit* de M . On note \mathcal{C} l'ensemble des circuits d'un matroïde. On remarque que \mathcal{I} peut être déterminé par \mathcal{C} (les membres de \mathcal{I} sont les sous-ensembles de E qui ne contiennent pas de membre de \mathcal{C}). Un circuit de cardinal un est appelé *boucle*.

Un ensemble \mathcal{C} de parties de E est l'ensemble des circuits d'un matroïde sur E si et seulement si \mathcal{C} vérifie les propriétés suivantes :

- (C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$,
- (C2) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ et $C_1 \subseteq C_2$ alors $C_1 = C_2$,

(C3) (*propriété d'élimination*) Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \neq C_2$ et $e \in C_1 \cap C_2$ alors il existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tel que $C_3 \subseteq \{C_1 \cup C_2\} \setminus \{e\}$.

Par exemple, dans un graphe $G = (V, E)$, on appellera *cycle* l'ensemble des arêtes d'un cycle de G , et *cycle élémentaire* un tel ensemble minimal pour l'inclusion. Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit \mathcal{C} l'ensemble des cycles élémentaires de G . On peut vérifier facilement que \mathcal{C} est l'ensemble des circuits d'un matroïde sur E , noté $M(G)$. Un matroïde ainsi obtenu est appelé *matroïde graphique*.

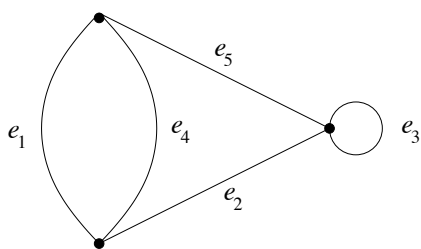


FIGURE 1 – Graphe G donnant le même matroïde que la matrice A de l'exemple 2.1

Remarque 2.2. Dans un matroïde (orienté ou non) général, il n'y a pas de notion de sommet. Le matroïde associé à un graphe ne détermine pas ce graphe en général : un graphe peut par exemple être séparé en deux au niveau d'un point d'articulation sans que cela change le matroïde, ou bien deux arêtes qui forment une coupe du graphe peuvent être interverties sans changer le matroïde. Le matroïde associé détermine le graphe si et seulement si celui-ci est 3-connexe.

Exemple 2.3. Soit $M(G)$ le matroïde graphique obtenu à partir du graphe G de la Figure 1 et soit A la matrice sur \mathbb{R} donnée dans l'Exemple 2.1. On pourra vérifier que $M(G)$ est isomorphe à $M(A)$ (par la bijection $e_i \rightarrow i$).

Remarque 2.4. En fait un matroïde graphique est toujours vectoriel. Soit $G = (V, E)$ un graphe et $\{v_i, i \in V\}$ la base canonique d'un espace vectoriel sur un corps quelconque. On peut vérifier que le graphe $G = (V, E)$ est associé au même matroïde que l'ensemble des vecteurs $v_i - v_j$ pour $(i, j) \in E$ (en représentant chaque arête par un couple de sommets). En effet, pour un cycle du graphe la somme des vecteurs correspondant est nulle, et en particulier une boucle du graphe correspond à un vecteur nul (voir Exemple 2.5).

Exemple 2.5. Soit $M(G')$ le matroïde graphique obtenu à partir du graphe G' de la

Figure 2. Soit A' la matrice construite en suivant la Remarque 2.4.

$$A' = \begin{pmatrix} & x_a & x_b & x_c & x_d \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On pourra vérifier que $M(G')$ est isomorphe à $M(A')$ (sur l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$). On observe que le cycle formé par les arêtes $a = (1, 2)$, $b = (1, 3)$ et $c = (2, 3)$ dans le graphe G' correspond à la dépendance linéaire $x_b = x_a + x_c$.

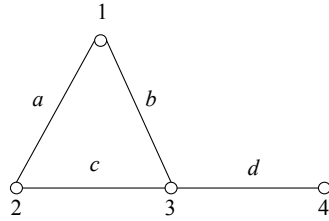


FIGURE 2 – Graphe G'

2.1.3 Bases

Une *base* d'un matroïde est un ensemble indépendant maximal (pour l'inclusion). Les bases d'un matroïde sont équicardinales (elles ont le même nombre d'éléments). En effet, sinon, on aurait deux bases B_1, B_2 telles que $|B_1| < |B_2|$ mais, d'après (I3) il existe $x \in B_2 \setminus B_1$ tel que $B_1 \cup x \in \mathcal{I}$ ce qui serait une contradiction avec le fait que B_1 est un indépendant maximal.

La famille notée \mathcal{B} des bases vérifie les conditions suivantes :

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$,

(B2) (propriété d'échange) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et $x \in B_1 \setminus B_2$ alors il existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tel que $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathcal{B}$

Si \mathcal{I} est la famille des sous-ensembles qui sont contenus dans l'un des ensembles de \mathcal{B} , ou d'une famille satisfaisant les mêmes propriétés que \mathcal{B} , alors (E, \mathcal{I}) est un matroïde, dont l'ensemble des bases est (isomorphe à) \mathcal{B} .

Remarque 2.6. Si G est un graphe connexe alors une base de $M(G)$ correspond à un arbre couvrant de G .

2.1.4 Rang

Soit $M = (E, \mathcal{I})$ et $X \subseteq E$. Le *rang* de X , noté $r_M(X)$, est le cardinal d'un indépendant contenu dans X et maximal pour l'inclusion, c'est-à-dire

$$r_M(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}.$$

De façon équivalente, on définit l'ensemble $\mathcal{I} \setminus X = \{I \subseteq X \mid I \in \mathcal{I}\}$. Alors $(X, \mathcal{I} \setminus X)$ est un matroïde, noté $M|_X$ et appelé *restriction de M à X* . Le rang $r_M(X)$ de X est le cardinal d'une base de $M|_X$.

On peut montrer que $r = r_M$ est la fonction rang d'un matroïde (E, \mathcal{I}) , où

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq E : r(I) = |I|\},$$

si et seulement si r vérifie les conditions suivantes :

- (R1) $0 \leq r(X) \leq |X|$, pour tout $X \subseteq E$,
- (R2) $r(X) \leq r(Y)$, pour tous $X \subseteq Y$,
- (R3) (*inégalité sous-modulaire*) $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ pour tous $X, Y \subseteq E$.

La condition (R3) est caractéristique des fonctions sous-modulaires. Un matroïde est une telle fonction avec accroissement unitaire (ajouter un élément augmente le rang de un au maximum). Dans le cas vectoriel, la notion de rang coïncide avec celle d'algèbre linéaire. Dans le cas graphique, le rang est égal au nombre de sommets moins le nombre de composantes connexes.

2.1.5 Fermeture

La *fermeture* d'un ensemble X dans M est définie par

$$cl(X) = \{x \in E \mid r(X \cup x) = r(X)\}.$$

On peut montrer que la fonction $cl : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ est la fonction fermeture d'un matroïde si et seulement si cl vérifie les conditions suivantes :

- (CL1) (*extensivité*) Si $X \subseteq E$ alors $X \subseteq cl(X)$,
- (CL2) (*croissance*) Si $X \subseteq Y \subseteq E$ alors $cl(X) \subseteq cl(Y)$,
- (CL3) (*indempotence*) Si $X \subseteq E$ alors $cl(cl(X)) = cl(X)$,
- (CL4) (*propriété d'échange*) Si $X \subseteq E$, $x \in E$ et $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$ alors $x \in cl(X \cup y)$.

Soit $X \subseteq E$, $cl(X)$ est aussi appelé le *fermé* (*flat* en anglais) de X . L'ensemble X est dit *fermé* si $X = cl(X)$. L'ensemble E est un fermé de rang r_M . Le fermé de rang 0 est constitué par l'ensemble des boucles de M . Un fermé

de rang 1, ou *point* est une classe d'éléments *parallèles*. Un matroïde tel que \emptyset soit fermé, et tous ses points comportent un seul élément, est dit *simple*. Un *hyperplan* est un fermé de rang $r_M - 1$.

Exemple 2.7. Soit $M(G')$ le matroïde graphique obtenu à partir du graphe G' de la Figure 2. On pourra vérifier que : $r(\{a, b, c\}) = r(\{c, d\}) = r(\{a, d\}) = 2$ et $cl\{a, b\} = cl\{a, c\} = cl\{b, c\} = \{a, b, c\}$.

2.1.6 Algorithme glouton

Soit \mathcal{I} un ensemble de sous-ensembles de E qui vérifie (I1) et (I2). Soit $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ (on dit que $w(e)$ est le *poids* de l'élément e). Soit $w(X) = \sum_{x \in X} w(x)$ pour $X \subseteq E$, et $w(\emptyset) = 0$.

Un problème d'optimisation consiste alors à trouver un ensemble maximal B de \mathcal{I} avec un poids maximal.

Algorithme glouton pour (\mathcal{I}, w)
$X_0 = \emptyset$
$j = 0$
Tant qu'il existe $e \in E \setminus X_j$ tel que $X_j \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ faire
Choisir un élément e_{j+1} de poids maximum
$X_{j+1} \leftarrow X_j \cup \{e_{j+1}\}$
$j \leftarrow j + 1$
$B \leftarrow X_j$
Renvoyer B

On peut caractériser un matroïde en utilisant l'algorithme glouton. En effet, (E, \mathcal{I}) est un matroïde si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$,
- (I2) $I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$,
- (G) Pour toute fonction $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, l'algorithme glouton donne un ensemble maximal de \mathcal{I} de poids maximal.

2.2 Application à l'optimisation combinatoire

Matroïde transversal. Soit $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ et soit $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$, $A_i \subseteq S$, $n \geq k$. Un *transversal* de \mathcal{A} est un sous-ensemble $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\}$ de S tel que $e_{j_i} \in A_i$ (autrement dit, il existe une bijection entre $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\}$ et $\{A_1, \dots, A_k\}$).

Un ensemble $X \subseteq S$ est dit un *transversal partiel* de \mathcal{A} s'il existe $\{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ tel que X est un transversal de $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_l}\}$.

Soit $G = (U, V; E)$ le graphe biparti formé à partir de $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$, $A_i \subseteq S$ où $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ et deux sommets $u_i \in U$ et $v_j \in V$ sont reliés si et seulement si $s_i \in A_j$. On a donc qu'un ensemble X est un transversal partiel de \mathcal{A} si et seulement s'il existe un couplage dans $G = (U, V; E)$ où chaque arête du couplage admet un sommet de U correspondant à l'un d'éléments de X , voir figure 3.

Exemple 2.8. Soit $E = \{e_1, \dots, e_6\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ avec $A_1 = \{e_1, e_2, e_6\}$, $A_2 = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $A_3 = \{e_2, e_3\}$ et $A_4 = \{e_2, e_4, e_6\}$. Alors, $\{e_1, e_3, e_2, e_6\}$ est un transversal de \mathcal{A} et $X = \{e_6, e_4, e_2\}$ est un transversal partiel de \mathcal{A} car X est transversal de $\{A_1, A_2, A_3\}$, voir Figure 3.

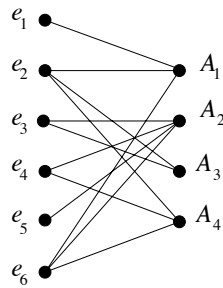


FIGURE 3 – Exemple de transversal

On peut montrer [15] que si $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ et si $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$, avec $A_i \subseteq S$ pour tout $1 \leq i \leq k$, alors l'ensemble de transversaux partiels de \mathcal{A} est l'ensemble des indépendants d'un matroïde. Un tel matroïde est appelé *matroïde transversal*.

Problème d'assignation. Soit $\{T_i\}$ un ensemble de tâches ordonnées par rapport à leur importance (priorités) et soit $\{E_i\}$ un ensemble d'employés capables de réaliser une ou plusieurs de ces tâches. On suppose que les tâches seront faites en même temps (et donc chaque employé ne peut faire qu'une seule tâche à la fois). Le problème est d'assigner les tâches aux employés de façon optimale (en maximisant les priorités).

On peut résoudre ce problème en appliquant l'algorithme glouton au matroïde transversal M où $S = \{T_i\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ avec A_i l'ensemble de tâches pour lesquelles l'employé i est qualifié. On remarque que le nombre

maximum de tâches qui peuvent-être réalisées en même temps est égal au plus grand transversal partiel de \mathcal{A} avec $w : S \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction correspondant à l'importance des tâches.

Exemple 2.9. On a quatre tâches $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ à réaliser, chacune avec une priorité donnée par les poids suivants : $w(t_1) = 10, w(t_2) = 3, w(t_3) = 3$ et $w(t_4) = 5$. Ces tâches peuvent être réalisées par trois employés e_1, e_2 et e_3 : l'employé e_1 est capable de réaliser les tâches t_1 et t_2 , l'employé e_2 est capable de réaliser les tâches t_2 et t_3 , et l'employé e_3 est capable de réaliser la tâche t_4 .

Soit $M = (\mathcal{I}, w)$ le matroïde transversal où \mathcal{I} est l'ensemble des couplages du graphe biparti $G = (U, V; E)$, avec $U = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ et $V = \{e_1, e_2, e_3\}$, et dans lequel $t_i \in U$ et $e_j \in V$ sont reliés si et seulement si l'employé e_j est capable de réaliser la tâche t_i . En appliquant l'algorithme glouton à M on obtient $X_0 = \emptyset, X_1 = \{t_1\}, X_2 = \{t_1, t_4\}$ et $X_3 = \{t_1, t_4, t_2\}$.

On peut vérifier que M est isomorphe au matroïde $M(G')$ donné dans l'Exemple 2.5 et donc, dans ce cas, l'algorithme glouton nous donne un arbre couvrant de poids maximum de G' .

2.3 Dualité

Soient M un matroïde sur un ensemble E et \mathcal{B} l'ensemble des bases de M . Alors,

$$\mathcal{B}^* = \{E \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$$

est l'ensemble des bases d'un matroïde sur E .

Le matroïde sur E ayant \mathcal{B}^* pour ensemble de bases, noté M^* , est appelé le *dual* de M . Une base de M^* est également appelée une *cobase* de M . Il est immédiat que

$$r(M^*) = |E| - r_M \text{ et } M^{**} = M.$$

De plus, l'ensemble \mathcal{I}^* des indépendants de M^* est donné par

$$\mathcal{I}^* = \{X \mid X \subset E \text{ tel qu'il existe } B \in \mathcal{B} \text{ avec } X \cap B = \emptyset\},$$

et la fonction rang de M^* est donnée par

$$r_{M^*}(X) = |X| + r_M(E \setminus X) - r_M,$$

pour $X \subset E$.

L'ensemble \mathcal{C}^* des circuits de M^* est l'ensemble des $D \subset E$ tels que $D \cap B \neq \emptyset$ pour toute base $B \in \mathcal{B}$ et D est minimal pour l'inclusion avec cette propriété. Un circuit de M^* est également appelé un *cocircuit* de M et un cocircuit de cardinal un est appelé *isthme* de M .

Il se trouve que les cocircuits d'un matroïde M sont les complémentaires des hyperplans dans l'ensemble des éléments, c.-à-d.

$$\mathcal{C}^* = \{E \setminus H \mid H \in \mathcal{H}\}$$

où \mathcal{H} est l'ensemble d'hyperplans de M .

Bien sûr, les cocircuits d'un matroïde satisfont la même axiomatique que les circuits (Section 2.1.2).

Cas graphique. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *cocycle*, ou *coupe*, de G est un ensemble d'arêtes joignant les deux parties d'une partition de l'ensemble des sommets du graphe. Un cocycle est *élémentaire* si et seulement s'il est minimal pour l'inclusion, ou bien, de façon équivalente, s'il est l'ensemble des arêtes joignant les deux parties d'une partition de l'ensemble des sommets d'une composante connexe induisant chacun un sous-graphe connexe.

On sait que X est un cocycle d'un graphe $G = (E, V)$ si et seulement si X est un sous-ensemble minimal de E ayant une intersection non nulle avec chaque forêt couvrante de G . On en déduit que si $\mathcal{C}(G)^*$ est l'ensemble de cocycles élémentaires d'un graphe G alors $\mathcal{C}(G)^*$ est l'ensemble de circuit d'un matroïde sur E . Le matroïde ainsi obtenu est appelé matroïde de *cocycle* de G , noté $B(G)$ (en anglais *bond*). On a

$$M^*(G) = B(G) \text{ et } M(G) = B^*(G).$$

Une question naturelle est la suivante : est-il vrai que si M est graphique alors M^* est également graphique ? Par exemple, si $M = M(K_4)$ où K_4 est le graphe complet à 4 sommets alors M^* est bien graphique car $M(K_4) = M^*(K_4)$. Cette propriété n'est pas vraie en général, à titre d'exemple, $M^*(K_5)$ n'est pas graphique. Cette propriété est vraie si et seulement si G est planaire, c'est-à-dire lorsque G a lui-même un graphe dual (voir Figure 5 pour un exemple). Dans ce cas on a

$$M^*(G) = M(G^*).$$

2.4 Somme directe et connexité

Soit $E = E_1 + E_2$ une partition de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $r_M(E) = r_M(E_1) + r_M(E_2)$,
- (ii) si $X \subset E_1$ et $Y \subset E_2$ sont des indépendants de M alors $X \cup Y$ est indépendant,

- (iii) pour tout circuit C de M on a $C \subset E_1$ ou $C \subset E_2$,
- (iv) pour tout $X \subset E_1$ et $Y \subset E_2$ on a $r_M(X \cup Y) = r_M(X) + r_M(Y)$.

Lorsqu'une partition $E = E_1 + E_2$ satisfait ces propriétés, on dit que M est *somme directe* des sous-matroides $M(E_1)$ et $M(E_2)$ et on écrit

$$M = M(E_1) \oplus M(E_2).$$

Dans ce cas, les bases de M sont les unions d'une base de $M(E_1)$ et d'une base de $M(E_2)$. Un matroïde est dit *connexe* s'il n'est pas somme directe non triviale (*non-connexe* autrement). Un matroïde s'écrit de façon unique comme somme directe de matroides connexes, appelés les *composantes connexes* de M . Notons qu'un matroïde est connexe si et seulement si deux éléments distincts quelconques sont contenus dans un circuit.

Remarque 2.10. *La connexité d'un matroïde graphique caractérise la 2-connexité d'un graphe. On parle ici de sommet-connexité. En effet, si G est un graphe sans boucle et sans sommet isolé et si $|V(G)| \geq 3$ alors $M(G)$ est connexe si et seulement si G est 2-connexe.*

2.5 Mineurs

Soient M un matroïde sur un ensemble E et $A \subset E$. Alors, l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur $E \setminus A$ est

$$\{X \subset E \setminus A \mid X \text{ est un indépendant de } M\}.$$

On dit que le matroïde ainsi défini est obtenu à partir de M en *supprimant* les éléments de A . On le désigne par $M \setminus A = M|_{E \setminus A}$. Pour expliciter l'ensemble des éléments de $M \setminus A$ on utilise également la notation $M(E \setminus A)$ et on parle alors du *sous-matroïde de M sur A* . De plus, les circuits de $M \setminus A$ sont les circuits de M contenus dans $E \setminus A$ et pour $X \subset E \setminus A$, on a $r_{M \setminus A}(X) = r_M(X)$.

Soient M un matroïde sur un ensemble E , $A \subset E$ et $X \subset E \setminus A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une base B de $M|_A$ telle que $X \cup B$ soit indépendant,
- (ii) Pour toute base B de $M|_A$ l'ensemble $X \cup B$ est indépendant,
- (iii) L'ensemble des indépendants d'un matroïde sur $E \setminus A$ est $\{X \subset E \setminus A \mid \text{il existe une base } B \text{ de } M|_A \text{ telle que } X \cup B \text{ soit indépendant dans } M\}$.

On dit que le matroïde ainsi défini est obtenu à partir de M en *contractant* les éléments de A . On le désigne par M/A . De plus, les circuits de M/A sont

les ensembles non vides minimaux pour l'inclusion de la forme $C \setminus A$ pour C circuit de M ; et pour $X \subset E \setminus A$, on a $r_{M/A}(X) = r_M(X \cup A) - r_M(A)$.

Lorsque l'ensemble A est réduit à un seul élément $A = \{e\}$ pour $e \in E$, on simplifie les notations en $M \setminus e$ et M/e . Les matroïdes $M \setminus e$ et M/e sont quelquefois appelés les deux *mineurs principaux* de M définis par e . Remarquons que $M \setminus e = M/e$ lorsque e est un isthme ou une boucle.

D'une façon générale, un *mineur* d'un matroïde M est tout matroïde obtenu à partir de M par une suite quelconque de suppressions et de contractions.

Les opérations de suppression et de contraction sont associatives et commutatives, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}(M \setminus A) \setminus A' &= M \setminus (A \cup A'), \\ (M/A) / A' &= M / (A \cup A'),\end{aligned}$$

et

$$(M \setminus A) / A' = (M/A') \setminus A.$$

Compte tenu de ceci, tout mineur de M est de la forme

$$M \setminus A / B = M / B \setminus A,$$

pour $A, B \subset E$ disjoints (cette écriture n'est pas unique en général).

Les opérations de suppression et de contraction sont duales, c'est-à-dire,

$$(M \setminus A)^* = (M^*) / A \text{ et } (M/A)^* = (M^*) \setminus A.$$

Exemple 2.11. Soient r et n deux entiers $0 \leq r \leq n$ et $E = \{1, \dots, n\}$. Alors, $\mathcal{I} = \binom{E}{r}$ l'ensemble des r -parties de E est l'ensemble des indépendants d'un matroïde, noté par $U_{n,r}$ et appelé *matroïde uniforme*. Notons que ce matroïde est vectoriel, il correspond à n vecteurs en position générale en dimension r .

Soit $T \subseteq E$ avec $|T| = t$. Alors,

$$U_{n,r} \setminus T = \begin{cases} U_{n-t,n-t} & \text{si } n \geq t \geq n-r, \\ U_{n-t,r} & \text{si } t < n-r. \end{cases}$$

On a

$$U_{n,r}^* \setminus T = U_{n,n-r} \setminus T = \begin{cases} U_{n-t,n-t} & \text{si } n \geq t \geq r, \\ U_{n-r,n-t} & \text{si } t < r, \end{cases}$$

et donc

$$U_{n,r} / T = (U_{n,n-r} \setminus T)^* = \begin{cases} (U_{n-t,n-t})^* = U_{0,n-t} & \text{si } n \geq t \geq r, \\ (U_{n-r,n-t})^* = U_{r-t,n-t} & \text{si } t < r. \end{cases}$$

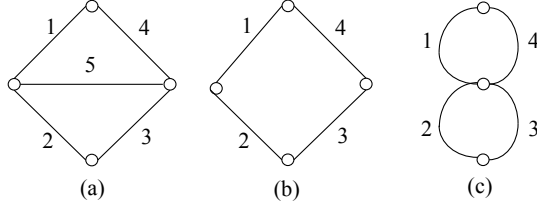


FIGURE 4 – (a) G ; (b) $G \setminus 5$ et (c) $G/5$.

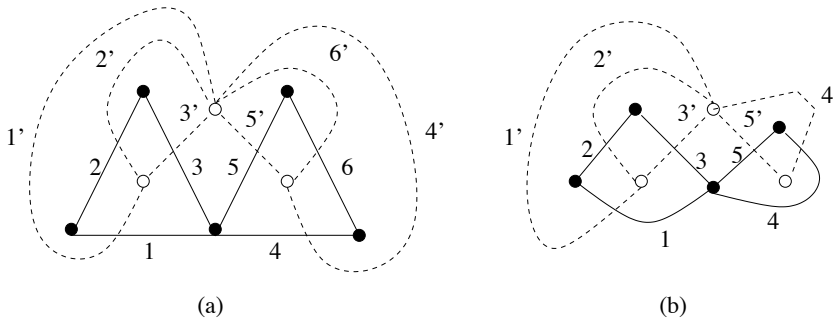


FIGURE 5 – (a) G et son dual G^* ; (b) $G^* \setminus 6'$ et $(G^* \setminus 6)^* = G/6$.

Remarque 2.12. Dans le cas graphique, les notions de mineurs des matroïdes associés coïncident avec les notions usuelles des graphes. Précisément, soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $T \subseteq E$. On peut vérifier que $M(G) \setminus T = M(G \setminus T)$ et $M(G)/T = M(G/T)$.

On obtient ainsi que tout mineur d'un matroïde graphique est graphique. Cette propriété n'est pas vraie pour d'autres classes de matroïdes, par exemple, elle n'est pas vraie pour la classe des matroïdes transversaux.

Les opérations de suppression et contraction d'une arête d'un graphe sont illustrées sur la Figure 4. Le fait que ces opérations sont duales l'une de l'autre apparaît sur la Figure 5, qui les montre sur un graphe planaire et son dual.

2.6 Matroïdes représentables ou vectoriels

Soient \mathbb{F} un corps, d un entier ≥ 1 , E un ensemble (fini) et $\mathcal{V} = (v_e)_{e \in E}$ une famille de vecteurs de \mathbb{F}^d indexée par E . Nous avons vu que

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid \text{les vecteurs } v_e, e \in X, \text{ sont linéairement indépendants sur } \mathbb{F}\}$$

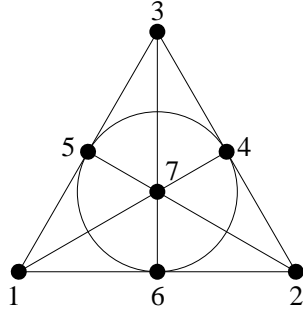


FIGURE 6 – Représentation affine conventionnelle du matroïde de Fano \mathbf{F}_7 dans le plan. \mathbf{F}_7 est le matroïde de rang 3 à 7 éléments où trois éléments forment une base si et seulement si ils ne sont pas sur une même droite ou sur le cercle (456). Il est vectoriel sur \mathbb{Z}_2 (voir Exemple 2.13), mais il n'est pas vectoriel sur \mathbb{R} . \mathbf{F}_7 est le premier exemple d'un matroïde non-orientable (voir Section 3.2.4).

est l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur E , dit représentable sur \mathbb{F} , ou vectoriel sur \mathbb{F} .

Exemple 2.13. Matroïde de Fano \mathbf{F}_7 . Figure 6. Le matroïde \mathbf{F}_7 est le plan projectif fini d'ordre $m = 2$. D'après la formule classique [11] il comporte $m^2 + m + 1 = 7$ éléments. On vérifie que \mathbf{F}_7 est le matroïde des dépendances linéaires sur \mathbb{Z}_2 des 7 vecteurs non nuls de \mathbb{Z}_2^3 , autrement dit des dépendances linéaires sur \mathbb{Z}_2 des colonnes de la matrice B suivante. Par contre ce matroïde n'est pas vectoriel sur \mathbb{R} .

$$B = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.14. Si M est défini par les vecteurs colonnes d'une matrice $(I_r \mid A)$ de taille $r \times n$, où I_r est l'identité $r \times r$ (ses colonnes sont une base quelconque dans E) et A une matrice $r \times (n - r)$, alors le matroïde dual M^* est défini par les vecteurs colonnes de la matrice $(-{}^t A \mid I_{n-r})$ avec I_{n-r} l'identité $(n - r) \times (n - r)$ et ${}^t A$ la transposée de A . Quelques auteurs appellent M^* le matroïde orthogonal de M car la dualité pour les matroïdes vectoriels est une généralisation de la notion d'orthogonalité pour les espaces vectoriels. En effet, soit V un sous-espace de \mathbb{F}^E . On rappelle que l'espace orthogonal V^\perp est défini à partir du produit scalaire canonique $\langle u, v \rangle = \sum_{e \in E} u(e)v(e)$ par

$$V^\perp = \{v \in \mathbb{F}^E \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ pour tout } u \in V\}.$$

On a [15, Proposition 2.2.23] que l'espace orthogonal de l'espace engendré par les vecteurs colonnes de $(I_r \mid A)$ est donné par l'espace engendré par les vecteurs colonnes de $(-{}^t A \mid I_{n-r})$.

On déduit de la Remarque 2.14 ci-dessus que le dual d'un matroïde vectoriel M sur un corps \mathbb{F} est vectoriel sur \mathbb{F} . On peut en déduire que tout mineur d'un matroïde vectoriel sur un corps \mathbb{F} est également vectoriel sur \mathbb{F} . En effet, la suppression d'un élément revient à supprimer la colonne correspondant dans la matrice, ce qui donne encore un matroïde vectoriel sur \mathbb{F} . Pour la contraction, on peut tout simplement appliquer la suppression et la dualité, c'est-à-dire : contracter un élément revient à prendre le matroïde dual (qui est vectoriel sur \mathbb{F}), supprimer un élément (on obtient un matroïde vectoriel sur \mathbb{F}), et ensuite prendre son dual (qui est vectoriel sur \mathbb{F}).

La propriété d'être vectoriel sur un corps \mathbb{F} se conserve pour les mineurs. Pour tout corps \mathbb{F} il existe une liste de *mineurs exclus*, autrement dit de matroïdes non vectoriels sur \mathbb{F} mais dont tout mineur propre est vectoriel sur \mathbb{F} . La détermination de la liste des *mineurs exclus pour* \mathbb{F} constitue une caractérisation des matroïdes vectoriels sur \mathbb{F} : *un matroïde est vectoriel sur* \mathbb{F} *si et seulement si aucun de ses mineurs n'est dans la liste des mineurs exclus pour* \mathbb{F} .

- Pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, la liste des mineurs exclus est infinie [15], et il semble hors de portée de pouvoir la déterminer.
- Pour $\mathbb{F} = GF(2) = \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: la liste se réduit au seul matroïde $U_{2,4}$ [21, 22].
- Pour $\mathbb{F} = GF(3) = \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: la liste comporte 4 matroïdes $F_7, F_7^*, U_{2,5}$, et $U_{3,5}$ [12].
- Pour $\mathbb{F} = GF(4)$: la liste comporte 8 matroïdes explicitement décrits [10].

Le dernier résultat est plutôt un tour-de-force, à confronter à la véritable question ouverte du domaine : *la liste est-elle finie pour un corps fini donné ?*

Nous parlons ici de représentabilité sur un corps. Une autre notion de représentabilité est topologique, sous forme d'arrangement de pseudosphères, équivalente alors à l'orientabilité d'un matroïde, voir Section 3.

Notons enfin qu'il existe des matroïdes non vectoriels (c.-à-d. sur aucun corps), un exemple classique est le matroïde de rang 3 obtenu à partir de la configuration de Non-Pappus, voir Figure 7.

2.7 Matroïdes réguliers

Un matroïde représentable sur tout corps \mathbb{F} est dit *régulier*. Par exemple, les matroïdes graphiques sont réguliers (voir Remarque 2.4). En général, les

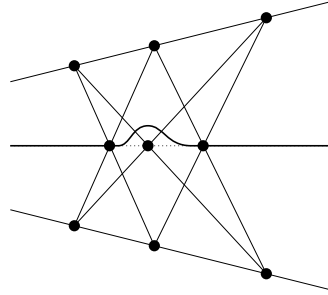


FIGURE 7 – *Non-Pappus*. Le matroïde est défini sur les neuf points représentés. Des points portés par une même droite forment un circuit. Dans le cas vectoriel, les trois points de l'étage du milieu sont nécessairement alignés (théorème de Pappus). Ici (*Non-Pappus*) on décide que ces trois points forment une base et non pas un circuit. On obtient encore un matroïde mais qui n'est pas vectoriel, quel que soit le corps choisi (voir Section 2.6). Remarquons aussi qu'en considérant comme éléments du matroïde non plus les points mais les droites représentées et la pseudodroite à l'étage du milieu, on obtient encore un exemple de matroïde (orienté) non vectoriel : dans le cas vectoriel la pseudodroite doit être une droite et passer par le point central, intersection de deux autres droites (voir Section 3.3.5).

matroïdes réguliers sont équivalents aux matrices *totalement unimodulaires*¹. Ils sont caractérisés aussi comme étant *binaires* (vectoriel sur \mathbb{Z}_2) et orientables (c.-à-d. matroïdes sous-jacents d'un matroïde orienté).

Tout mineur d'un matroïde régulier étant régulier d'après les résultats de la Section 2.6, on peut caractériser les matroïdes réguliers par une liste de *mineurs exclus*. D'après un théorème de Tutte [21, 22] cette liste est finie et se réduit aux 3 matroïdes : $U_{2,4}$, F_7 et F_7^* .

Les matrices totalement unimodulaires étaient connues de H. Poincaré dès le début du 20ème siècle, qui les avait rencontrées dans le contexte des complexes simpliciaux, un graphe étant en particulier un complexe simplicial de dimension 1. Il avait posé le problème de leur construction. Tutte avait apporté une réponse partielle sous forme d'une liste de mineurs exclus. La construction complète est due à Seymour [17]. Essentiellement, en plus des matroïdes graphiques et cographiques, un seul autre matroïde R_{10} est nécessaire et suffisant pour construire tous les matroïdes réguliers. Le matroïde R_{10} est le matroïde des dépendances linéaires sur $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ des 10 vecteurs

1. Une matrice *unimodulaire* est une matrice carrée à coefficients entiers dont le déterminant vaut -1 ou 1 . Une matrice *totalement unimodulaire* est une matrice à coefficients $0,1,-1$ dont les déterminants de toutes les sous-matrices carrées valent $0,1$ ou -1 .

de \mathbb{Z}_2^5 ayant 3 composantes égales à 1 et 2 composantes égales à 0.

A partir des briques élémentaires constituées par les matroïdes graphiques, cographiques et R_{10} , trois opérations simples permettent de construire tous les matroïdes réguliers : les 1- 2- et 3-sommes. La 1-somme est simplement la somme directe de deux matroïdes sur des ensembles disjoints. La 2-somme est le recollement de deux matroïdes sur des ensembles avec un seul élément commun. La 3-somme est le recollement de deux matroïdes binaires sur des ensembles ayant 3 éléments communs constituant un 3-circuit dans chacun des matroïdes.

2.8 Union de matroïdes

Soient $k \geq 2$ matroïdes M_1, M_2, \dots, M_k sur un ensemble E , et \mathcal{I}_i l'ensemble des indépendants de M_i pour $i = 1, 2, \dots, k$. On pose

$$\mathcal{I} = \{X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k \mid X_i \in \mathcal{I}_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, k\}$$

Nash-Williams [14] a montré que \mathcal{I} est l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur E , appelé *union des matroïdes* $(M_i)_{i=1,2,\dots,k}$ et noté $M_1 \vee M_2 \vee \dots \vee M_k$.

La fonction rang du matroïde $M_1 \vee M_2 \vee \dots \vee M_k$ pour $A \subset E$ est donnée par

$$r_{M_1 \vee M_2 \vee \dots \vee M_k}(A) = \min_{X \subset A} \left(\sum_{i=1}^{i=k} r_i(X) + |A \setminus X| \right).$$

L'hypothèse que les matroïdes M_i sont sur un même ensemble est faite pour des raisons de commodité. On peut toujours s'y ramener sans perdre en généralité de façon significative. En effet si les matroïdes M_i sont sur des ensembles E_i quelconques posons $E = \bigcup_{i=1}^k E_i$. Pour $i = 1, \dots, k$, définissons un matroïde \widetilde{M}_i sur E par les conditions $\widetilde{M}_i(E_i) = M_i$ et $r_{\widetilde{M}_i}(e) = 0$ pour $e \in E \setminus E_i$, autrement dit on prolonge M_i à E en ajoutant des boucles. Clairement l'ensemble \mathcal{I} ne change pas lorsqu'on passe des M_i aux \widetilde{M}_i .

Un usage important de l'union de matroïdes est le célèbre *théorème d'intersection* du à Edmonds [7] établissant que pour tout entier k , il existe $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ tel que $|X| \geq k$ si et seulement si $r_1(A) + r_2(E \setminus A) \geq k$ pour tout $A \subset E$. Le résultat correspondant en termes de graphes avait été démontré quelques années plus tôt. Généralisé aux matroïdes, ce théorème s'applique à divers problèmes d'optimisation combinatoire : recherche de couplages maximaux,

de couplages de poids maximum dans les graphes bipartis, d'arborescences dans les graphes orientés.

Il est naturel de considérer le problème de la généralisation du théorème d'intersection de 2 matroïdes à l'intersection de $k \geq 2$ matroïdes. Mais jusqu'à présent un tel résultat n'a pas été obtenu. En fait il semble peu probable qu'il puisse exister une solution satisfaisante.

On remarque que, dans la démonstration du résultat de Edmonds, l'existence du dual d'un matroïde joue un rôle fondamental, et on ne voit pas comment généraliser dans cette direction à plus de 2 matroïdes. Une raison plus convaincante est fournie par la théorie de la complexité des algorithmes. Un problème de décision est dit de classe *NP* ('*Non-deterministic Polynomial*') si ses solutions peuvent être vérifiées en temps polynomial, c.-à-d. au moyen d'un algorithme utilisant un nombre polynomial d'étapes. L'exemple type de problème *NP* est celui de la *satisfiabilité* booléenne.

Le problème de l'intersection de 3 matroïdes est *NP*-complet. Par contre l'algorithme d'intersection de deux matroïdes est polynomial à partir de l'oracle d'indépendance. Il est en particulier polynomial pour des matroïdes vectoriels [8].

2.9 Polynôme de Tutte

Le *polynôme de Tutte* d'un matroïde M est la fonction génératrice définie comme suit

$$t(M; x, y) = \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(X)} (y-1)^{|X|-r(X)}.$$

Ce polynôme a été introduit par Tutte [20] pour les graphes et ensuite généralisé pour les matroïdes par Crapo [6]. Ses nombreuses et riches propriétés, dont plusieurs définitions équivalentes [4], font depuis l'objet d'une littérature abondante et encore d'actualité. C'est un bon exemple d'objet remarquable en théorie des matroïdes. Nous en présenterons d'abord quelques propriétés fondamentales et générales, puis quelques applications plus spécifiques, dans trois classes de matroïdes différentes, de généralité croissante : les matroïdes graphiques, réguliers, et orientés.

Exemple 2.15. On rappelle que $U_{3,2}$ est le matroïde uniforme à 3 éléments de rang 2. Alors, $t(U_{3,2}; x, y) = x^2 + x + y$.

2.9.1 Quelques propriétés générales

On rappelle qu'une *boucle* d'un matroïde M est un circuit de cardinal un et qu'un *isthme* de M est un élément qui est dans toutes les bases de M . Le polynôme de Tutte peut-être exprimé récursivement comme suit

$$t(M; x, y) = \begin{cases} t(M \setminus e; x, y) + t(M/e; x, y) & \text{si } e \text{ n'est ni un isthme} \\ & \text{ni une boucle,} \\ xt(M \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ est un isthme,} \\ yt(M/e; x, y) & \text{si } e \text{ est une boucle.} \end{cases}$$

Ci-dessous quelques propriétés basiques et énumératives du polynôme de Tutte :

- (i) $t(M^*; x, y) = t(M; y, x)$;
- (ii) soient M_1 et M_2 deux matroïdes sur les ensembles E_1 et E_2 respectivement avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, alors $t(M_1 \oplus M_2; x, y) = t(M_1; x, y) \cdot t(M_2; x, y)$;
- (iii) $t(M; 2, 2) = 2^{|E|}$ compte le nombre de sous-ensembles de E ;
- (iv) $t(M; 1, 1)$ compte le nombre de bases de M ;
- (v) $t(M; 2, 1)$ compte le nombre d'indépendants de M ;
- (vi) $t(M; 1, 2)$ compte le nombre d'ensembles générateurs de M .

Le polynôme de Tutte intervient dans de nombreux problèmes de dénombrement en théorie des graphes ou des matroïdes, et jusqu'en physique statistique. Notamment ses coefficients sont des invariants importants. Par exemple, le coefficient de x (ou de y) compte le nombre d'orientations bipolaires d'un graphe (acycliques avec unique puits et unique source adjacents fixés extrémités de l'arête e), ou, plus généralement, le nombre de régions ne touchant pas un hyperplan e donné dans un arrangement d'hyperplan. Curieusement, ce nombre ne dépend pas du choix de e : c'est un invariant (appelé également invariant β par Crapo [5]).

Plus généralement ses coefficients ont des interprétations lorsque l'on ordonne les éléments du matroïde, ils comptent notamment le nombre de bases d'*activités internes et externes* données : ces paramètres fournissent une autre définition classique du polynôme de Tutte, que nous ne détaillerons pas ici.

2.9.2 Cas graphique : polynôme chromatique et polynôme des flots

Polynôme chromatique. Soit $G = (V, E)$ un graphe et λ un entier positif. Une λ -coloration de G est une application $\phi : V \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$. La coloration

est dite *propre* si pour toute arête $\{u, v\} \in E(G)$, $\phi(u) \neq \phi(v)$. Soit $\chi(G, \lambda)$ le nombre de λ -colorations propres de G .

Le résultat suivant peut être démontré en utilisant le principe d'inclusion-exclusion. Si $G = (V, E)$ est un graphe et λ un entier positif, alors,

$$\chi(G, \lambda) = \sum_{X \subseteq E} (-1)^{|X|} \lambda^{\omega(G[X])},$$

où $\omega(G[X])$ désigne le nombre de composantes connexes du sous-graphe engendré par X .

Le polynôme chromatique a été introduit par Birkhoff [1] comme un outil pour attaquer le problème de quatre couleurs. En effet, si pour un graphe planaire G on a $\chi(G, 4) > 0$ alors G admet bien une 4-coloration. Le polynôme chromatique est essentiellement une évaluation du polynôme de Tutte de $M(G)$. En effet, si $G = (V, E)$ est un graphe avec $\omega(G)$ composantes connexes, alors,

$$\chi(G, \lambda) = \lambda^{\omega(G)} (-1)^{|V(G)| - \omega(G)} t(M(G); 1 - \lambda, 0).$$

Polynôme chromatique avec défauts. Soit G un graphe, on définit le *polynôme chromatique avec défauts* $B(G, \lambda, s)$ comme

$$B(G, \lambda, s) = \sum_i b_i(G, \lambda) s^i,$$

avec $b_i(G, \lambda)$ le nombre de λ -colorations de G comportant exactement i arcs dont les extrémités sont de la même couleur. On a

$$B(G, \lambda, s) = \lambda^{\omega(G)} (s - 1)^{r(G)} t\left(M(G); \frac{s + \lambda - 1}{s - 1}, s\right).$$

Polynôme des flots. Soit G un graphe orienté (chaque arête a une extrémité *positive* et une extrémité *négative*). Soit $S \subset V(G)$ et soit $\omega_G^+(S)$ (resp. $\omega_G^-(S)$) l'ensemble d'arêtes de G avec extrémités positives (resp. négatives) dans S et extrémités négatives (resp. positives) dans $V \setminus S$. Soit H un groupe abélien (avec notation additive). Un H -flot dans G est une application $\phi : E(G) \rightarrow H$ nommée *poids* telle que la somme des poids des arêtes entrant dans v est égale à la somme de poids des arêtes sortant de v pour tout sommet $v \in V(G)$. Un H -flot de G est partout non nul si $\phi(e) \neq 0$ pour tout $e \in E(G)$.

Soit $f_\lambda(G)$ le nombre de H -flot de G partout non nul, appelé *polynôme des flots* de G . On a que si G est connexe et si H est un groupe abélien fini d'ordre λ , alors

$$f_\lambda(G) = (-1)^{|E(G)| - r(G)} t(M(G); 0, 1 - \lambda).$$

La notion de k -flot partout non nul est la notion duale de coloration propre. En effet, si G est un graphe planaire connexe, alors,

$$\chi(G, \lambda) = \lambda F_\lambda(G^*).$$

2.9.3 Cas régulier : polynôme d'Ehrhart

La théorie d'Ehrhart s'intéresse à compter le nombre de points à coordonnées entières dans un polytope. Un polytope est dit *entier* si tous ses sommets ont des coordonnées entières. Étant donné un polytope entier P , Ehrhart a étudié la fonction i_P qui compte le nombre de points entiers dans le polytope P dilaté d'un facteur t , soit,

$$\begin{aligned} i_P : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ t &\longmapsto |tP \cap \mathbb{Z}^d| \end{aligned}$$

Ehrhart a montré que la fonction i_P est un polynôme en t de degré d ,

$$i_P(t) = c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + \cdots + c_1 t + c_0.$$

Les coefficients c_i nous donnent des informations sur le polytope P . Par exemple, c_d est égal au volume de P noté $Vol(P)$, c_{d-1} est égal à $Vol(\partial(P))/2$ où $\partial(P)$ est la surface de P , et $c_0 = 1$ est la caractéristique d'Euler de P . Tous les autres coefficients restent encore un mystère.

On rappelle que la *somme de Minkowski* de deux ensembles A et B de \mathbb{R}^d est

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}.$$

Soit $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ un ensemble fini d'éléments de \mathbb{R}^d . Un *zonotope* engendré par V , noté $Z(A)$, est le polytope formé par la somme de Minkowski des segments de droites

$$Z(A) = \{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k | \alpha_i \in [-v_i, v_i]\}.$$

Soit M un matroïde régulier et soit A l'une de ses représentations par une matrice totalement unimodulaire. Alors, le polynôme d'Ehrhart associé au zonotope $Z(A)$ est donné [19] par

$$i_{Z(A)}(q) = q^{r(M)} t \left(M; 1 + \frac{1}{q}, 1 \right).$$

2.9.4 Cas orienté : orientations acycliques et totalement cycliques

Nous anticipons un peu ici sur la Section 3 suivante, où les notions présentées ci-dessous relatives aux matroïdes orientés seront définies précisément.

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Une *orientation* de G est une orientation des arêtes de G . On dit qu'une orientation est *acyclique* si le graphe orienté n'a pas de cycle orienté (c.-à-d. pas de cycle dont les orientations des arêtes sont conformes à un sens de parcours du cycle). Un résultat très classique, attribué à Stanley [18] dans les graphes, est que, pour un graphe connexe $G = (V, E)$, le nombre $a(G)$ d'orientations acycliques de G est

$$a(G) = (-1)^{|V(G)|} \chi(G, -1) = t(M(G); 2, 0).$$

En fait, ce résultat peut être vu comme corollaire d'un résultat équivalent plus ancien et plus général sur les arrangements d'hyperplans [24]. En effet, un graphe peut être associé à un ensemble de vecteurs réels ayant même matroïde associé M (cf. Remarque 2.4). Ces vecteurs peuvent être vus comme des formes linéaires, dont l'ensemble des noyaux forment un ensemble fini (arrangement) d'hyperplans, et on a alors que les régions de l'espace délimitées par ces hyperplans sont en bijection canonique avec les orientations acycliques du graphe (ceci sera détaillé en Section 3.3.5). Un résultat plus général que le précédent est que le nombre de régions $a(M)$ de l'arrangement d'hyperplans M vérifie :

$$a(M) = t(M; 2, 0).$$

Enfin, ce dernier résultat se généralise aux matroïdes orientés, c'est-à-dire, grossièrement aux arrangements de 'pseudohyperplans' qui n'ont plus besoin d'être droits mais découpent l'espace en régions de façon similaire. Le nombre d'orientations acycliques $a(M)$ d'un matroïde orienté M vérifie :

$$a(M) = t(M; 2, 0).$$

Mentionnons que cette généralisation, due à Las Vergnas [13], consiste encore plus généralement en une autre définition du polynôme de Tutte, en termes d'énumérations d'orientations pour des ordres sur les éléments (desquelles on retrouve aussi les invariants mentionnés en Section 2.9.1).

Passons maintenant au dual. Puisque les orientations acycliques du dual M^* de M sont les orientations dites totalement cycliques de M , et puisque $t(M^*; x, y) = t(M; y, x)$ (cf. Section 2.9.1), le nombre d'orientations totalement cycliques $a^*(M)$ d'un matroïde orienté M vérifie :

$$a^*(M) = a(M^*) = t(M; 0, 2).$$

Et, pour conclure, revenons aux graphes. Une orientation du graphe G est dite *totalelement cyclique* si toute arête appartient à un cycle bien orienté, ce qui est équivalent, pour G connexe, à une orientation fortement connexe. Comme corollaire du résultat ci-dessus on a donc que le nombre d'orientations fortement connexes $a^*(G)$ d'un graphe connexe G est :

$$a^*(G) = a^*(M(G)) = a(M(G)^*) = t(M(G); 0, 2).$$

En passant par la généralisation aux matroïdes (orientés) et par la dualité, on a fait apparaître le résultat ci-dessus de théorie des graphes, de façon directe et naturelle.

3 Théorie des matroïdes orientés

La théorie des matroïdes orientés est née dans les années 1970. Ils ont été introduits indépendamment et à peu près simultanément d'une part par Las Vergnas à partir de la théorie des graphes en tant que généralisation aux matroïdes de la notion d'orientation, d'autre part par Bland à partir de la programmation linéaire en tant que modèle combinatoire adapté à ce type de problèmes, et enfin par Folkman et Lawrence, qui partant de l'étude des polytopes ont abouti à la représentation topologique des matroïdes orientés par les arrangements de pseudosphères. Ces différentes motivations, toutes restées d'actualité, conduisent à des points de vue complémentaires, qui ont chacun leur importance. Pour approfondir, et pour les preuves des résultats énoncés ensuite, le livre de référence sur cette théorie est [2].

Soit E un ensemble fini. Une *partie signée* de E est une partie \underline{A} de E munie d'une partition en éléments dits positifs et en éléments dits négatifs : $\underline{A} = A^+ \uplus A^-$. La partie \underline{A} est alors appelée *support* de la partie signée $A = (A^+, A^-)$. On se permet souvent d'employer la même notation A pour la partie signée et son support, et on note traditionnellement les éléments négatifs avec un surlignage ($\overline{12}$).

De manière générale, un *matroïde orienté* M sur un ensemble fini E est défini par un ensemble de parties signées de E , qui peut être l'ensemble des *circuits*, des *cocircuits*, des *vecteurs* ou des *covecteurs* de M . Il peut être également défini par un ensemble de parties appelées *bases* telle que chaque partie a un signe (non plus chaque élément de chaque partie). Dans le cas des circuits ou cocircuits, les supports (non-signés) sont ceux d'un matroïde, appelé *matroïde sous-jacent*.

Nous commencerons par donner un aperçu de cas particuliers de matroïdes orientés associés à d'autres objets (graphes orientés, arrangements de pseudodroites, configurations de points). Puis nous verrons les définitions combinatoires et topologiques générales, accompagnées des principales notions et propriétés. Enfin nous verrons un lien avec la programmation linéaire et comment une propriété classique de dualité dans ce cadre s'avère généraliser un résultat de graphes orientés et trouver un cadre naturel en termes de matroïdes orientés.

3.1 Quelques classes et propriétés usuelles

3.1.1 Graphes

Soit un graphe orienté $G = (V, E)$. Le matroïde orienté $M(G)$ défini à partir de G vérifie les propriétés suivantes.

- Les circuits ont pour supports les ensembles d'arêtes des cycles élémentaires de G (cycles minimaux pour l'inclusion). Ces supports forment les circuits du matroïde associé, voir Section 2.1.2.
- Le signe d'un élément e d'un circuit est $+$ ou $-$ selon que l'arête e est orientée ou non dans la direction d'un sens de parcours fixé. Ainsi un *circuit positif* correspond à un cycle orienté, c.-à-d. dont toutes les arêtes suivent le même sens de parcours du cycle.

Puisque l'on peut choisir deux sens de parcours opposés, il existe exactement deux circuits opposés ayant le même cycle élémentaire sous-jacent.

De façon similaire, on a les propriétés suivantes.

- Les cocircuits ont pour supports les ensembles d'arêtes des cocycles élémentaires de G (coupes minimales pour l'inclusion). Ces supports sont les cocircuits du matroïde associé, voir Section 2.3.
- Le signe d'un élément e d'un cocircuit est $+$ ou $-$ selon que l'arête e est orientée ou non dans une direction fixée pour le cocycle (le cocycle est l'ensemble des arêtes joignant A et B pour une partition $V = A + B$, une direction pour le cocycle est soit de A vers B , soit de B vers A). Ainsi un *cocircuit positif* correspond à un cocycle orienté, c.-à-d. dont les arêtes sont orientées toutes d'une même partie vers l'autre.

Puisque l'on peut choisir deux directions opposées, il existe exactement deux cocircuits opposés ayant le même cocycle élémentaire sous-jacent.

Exemple 3.1. Sur la Figure 8 est représenté un graphe K_4 orienté. En légende sont données les listes de ses circuits et cocircuits.

Un tel matroïde orienté est dit *graphique*. De nombreuses informations structurelles sur le graphe orienté se formulent dans ce matroïde orienté as-

socié. Notamment, celui-ci détermine le graphe dès lors qu'il est 3-connexe (voir Remarque 2.2). Par exemple, un graphe connexe orienté G est *acyclique*, resp. *totalelement cyclique* (ou *fortement connexe*), si tout élément de $M(G)$ appartient à un circuit positif, resp. un cocircuit positif (voir Section 2.9.4, voir aussi Section 3.4.2).

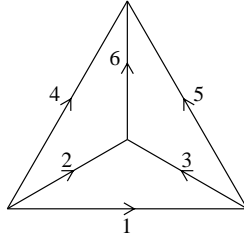


FIGURE 8 – Orientation de référence de K_4 . Ses circuits sont $\overline{123}$, $\overline{246}$, $\overline{356}$, $\overline{145}$ et leurs opposés. Ses cocircuits sont 124 , $\overline{135}$, 456 , $\overline{236}$, $\overline{2345}$, $\overline{1346}$, $\overline{1256}$ et leurs opposés.

Remarque 3.2. Dans un matroïde orienté graphique, on a la propriété (facile) que, pour tout circuit C et cocircuit D :

$$|(C^+ \cap D^+) \cup (C^- \cap D^-)| = |(C^- \cap D^+) \cup (C^+ \cap D^-)|.$$

Cette propriété d'orthogonalité reste valide dans les matroïdes orientés réguliers (c.-à-d. vectoriels sur tout corps, cf. Section 2.7). Dans les matroïdes orientés en général, on sait juste que les deux membres de cette égalité sont soit nuls soit non nuls simultanément.

3.1.2 Arrangements de pseudodroites ou de pseudocercles

On appelle *pseudodroite* du plan affine euclidien une courbe homéomorphe à une droite réelle, et un *arrangement de pseudodroites* un ensemble de pseudodroites qui se coupent deux à deux une et une seule fois, en un point où elles se croisent. Un cas particulier est évidemment celui d'un arrangement de droites, dans lequel toutes les pseudodroites sont des droites. Ce cas-ci est aussi un cas particulier d'arrangement d'hyperplans (réels) : ensemble fini d'hyperplans (sous-espaces de codimension 1) dans un espace affine ou vectoriel (réel), voir Section 3.3.5. La généralisation de la notion de pseudodroites en dimension supérieure sera considérée ultérieurement (Section 3.3.1).

Afin d'avoir une symétrie centrale, utile pour les axiomatiques, on préfère considérer que le plan affine est un hémisphère de la sphère réelle de dimension 2 et que les pseudodroites se prolongent continûment et symétriquement sur l'hémisphère opposé. Ceci revient à considérer des *pseudocercles* homéomorphes à des cercles S^1 sur la sphère réelle S^2 de dimension 2, qui se coupent deux à deux en exactement deux points opposés où ils se croisent, formant à eux tous un *arrangement de pseudocercles*.

Les pseudocercles découpent la sphère en un complexe cellulaire de faces de dimensions 0, 1, ou 2. Si on choisit pour chaque pseudocercle un côté positif et un côté négatif, on peut associer à chaque face une partie signée dont le support est l'ensemble des pseudocercles ne contenant pas cette face, et dont les signes sont donnés par les côtés des pseudocercles dans lesquels se trouve la face.

L'arrangement définit un matroïde orienté dont :

- les *cocircuits* sont les parties signées associées aux faces de dimension 0 (sommets),
- les *covecteurs* sont les parties signées associées aux faces de toutes dimensions.

Pour représenter par une figure un arrangement de pseudocercles, on représentera ici un hémisphère de S^2 , dont le bord sera un des pseudocercles (homéomorphe à S^1). En général, E étant dans les exemples 1, . . . , n , la figure représentera le côté positif de 1, dont le bord sera 1. Bien sûr il n'apparaît ainsi que la moitié des régions de l'arrangement complet de pseudocercles, l'autre moitié se déduisant évidemment par symétrie centrale.

Exemple 3.3. La Figure 9 représente cinq pseudodroites 2, . . . , 6 dans l'hémisphère positif du pseudocercle 1. Le côté positif de chaque pseudodroite est choisi pour être celui contenant la région grisée. Sont également représentés les covecteurs de cet arrangement de pseudocercles : à chaque face est associée son covecteur. Les cocircuits correspondant aux faces de dimension 0 (sommets) sont les mêmes que dans l'exemple graphique précédent : les Figures 8 et 9 représentent en fait le même matroïde orienté défini par une orientation particulière de K_4 .

Remarque 3.4. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- l'intersection de tous les côtés positifs est une région (face de dimension 2),
- il existe un covecteur positif,
- tout élément appartient à un cocircuit positif.

Dans ce cas, l'arrangement signé est dit *acyclique* :

Les arrangements de pseudocercles représentent les *matroïdes orientés simples de rang 3*, où le rang 3 est dû à la dimension 2 de la sphère consi-

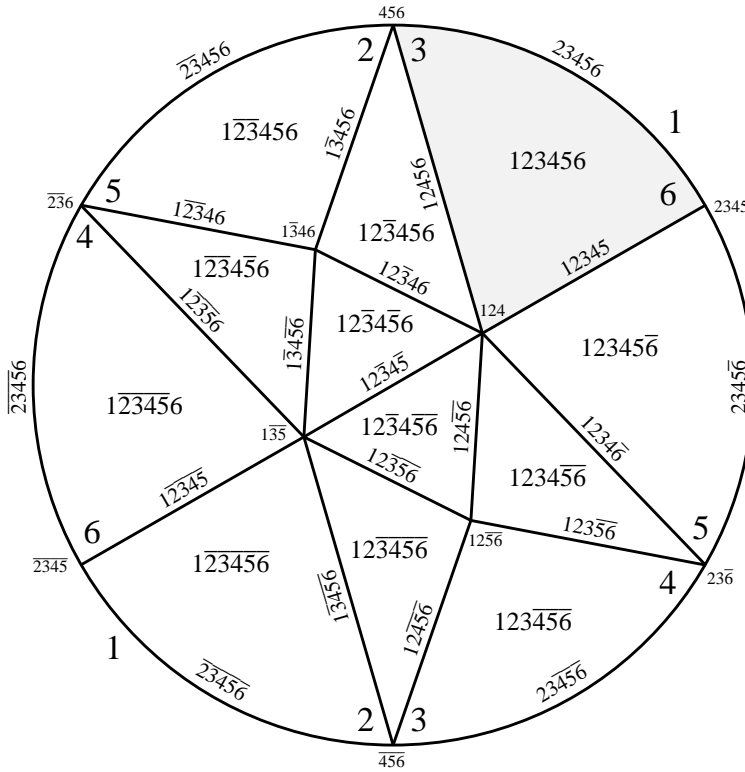


FIGURE 9 – Covecteurs de K_4 (pour l'orientation de référence).

dérée, et où “simple” signifie que l’on interdit la duplication d’un élément, ainsi que la présence de boucles qui sont en général les éléments de rang 0.

3.1.3 Configurations de vecteurs ou de points affines

Soit E un ensemble fini d’éléments d’un espace vectoriel réel de dimension d . Quitte à restreindre l’espace ambiant, on suppose que E en est une partie génératrice. On dit que E est de rang $r = d$. Le matroïde orienté M associé à E est caractérisé par l’un des ensembles suivants. Un tel matroïde orienté est appelé *vectoriel* (sur \mathbb{R}) ou *réalisable*.

Remarque 3.5. Les éléments de E sont en position générale si toute partie de E de cardinal inférieur à $r = d$ est indépendante, avec d la dimension de l’espace vectoriel engendré. Le matroïde orienté associé est alors dit *uniforme*, de même que son matroïde sous-jacent (voir Section 2.11). Il est important de constater que le

matroïde (non-orienté) uniforme est trivial, alors qu'il existe de multiples matroïdes orientés associés à des points en position générale et que le cas uniforme est presque aussi complexe que le cas général dans la structure orientée. Ce cas distingue bien les deux structures.

Circuits. L'ensemble \mathcal{C} des *circuits* est un ensemble de parties signées de E . Une partie de E est un *dépendant*, ou partie *dépendante*, si elle est linéairement dépendante. Les supports des circuits sont les parties dépendantes minimales pour l'inclusion (ce sont les circuits du matroïde vectoriel sous-jacent, voir Section 2.1.2). Les signes d'un circuit C sont donnés par les signes des coefficients dans une relation de dépendance linéaire des éléments de son support $\underline{C} : \sum_i a_i e_i = 0$, avec $e_i \in \underline{C}$ et a_i réel, donne le circuit $C = (C^+, C^-)$ avec $C^+ = \{e_i \mid a_i > 0\}$ et $C^- = \{e_i \mid a_i < 0\}$. Bien sûr, si C est un circuit, alors $-C$ est aussi un circuit.

Cocircuits. L'ensemble \mathcal{C}^* des *cocircuits* est un ensemble de parties signées de E . Une partie de E est un *hyperplan* du matroïde si elle engendre un hyperplan de l'espace ambiant (sous-espace de dimension $d - 1$) et si elle est égale à l'intersection de E avec cet hyperplan. Les supports des cocircuits sont les complémentaires dans E de ces hyperplans (ce sont les cocircuits du matroïde vectoriel sous-jacent, voir Section 2.3). Un hyperplan sépare l'espace en deux demi-espaces, un demi-espace est choisi comme étant positif et l'autre comme étant négatif. Les signes des éléments d'un cocircuit C sont donnés par les signes des demi-espaces auxquels ils appartiennent, délimités par l'hyperplan engendré par le complémentaire de C . Bien sûr, si C est un cocircuit, alors $-C$ est aussi un cocircuit.

Bases. L'ensemble \mathcal{B} des *bases* est un ensemble de parties de E , chaque base ordonnée étant munie d'un signe appelé *chirotope*. Une partie de E est un *indépendant*, ou partie *indépendante*, si elle n'est pas dépendante; une partie de E est une base si c'est un indépendant de cardinal maximal; les bases ont donc toutes pour cardinal $r = d$ (tout ceci a pour cadre le matroïde sous-jacent, voir Section 2.1.3).

Le chirotope d'une base ordonnée est le signe du déterminant de cette base écrite sur une base canonique fixée :

$$\chi(b_1, \dots, b_r) = \text{signe}(\det(b_1, \dots, b_r)).$$

Bien sûr, on peut remplacer la fonction χ par son opposée (choix arbitraire). Et on peut étendre χ à une application de E^r dans $\{+, -, 0\}$ de sorte que

$\chi(b_1, \dots, b_r) = 0$ si $\{b_1, \dots, b_r\} \notin \mathcal{B}$.

Geométriquement, les chirotopes correspondent aux *orientations de simplexes* : les bases ordonnées de l'espace, ou les simplexes ordonnés dans un espace affine, ont deux orientations possibles, correspondant aux deux signes possibles du chirotope (dès qu'une orientation positive de référence est fixée).

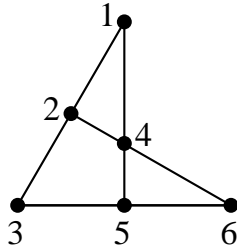


FIGURE 10 – Configuration de points affines de K_4 (pour l'orientation de référence).

Configuration de points affines. Si l'on considère des points d'un espace affine \mathbb{R}^d au lieu de vecteurs, les définitions précédentes s'appliquent en considérant ces points comme extrémités de vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{(d+1)}$. La seule différence est que dans le cas affine le matroïde orienté est nécessairement acyclique. En effet, aucun élément ne peut appartenir à un circuit positif, puisque tous les points sont portés par un même hyperplan affine de $\mathbb{R}^{(d+1)}$ ne passant pas par l'origine.

Exemple 3.6. La Figure 10 montre une configuration de points affines donnant à nouveau le même matroïde orienté que les Figures 8 et 9. On peut vérifier que l'on retrouve les mêmes listes de circuits et cocircuits. Par exemple, le circuit $1\bar{2}3$ est obtenu par une relation de dépendance linéaire du type $a_1v_1 + a_3v_3 = a_2v_2$ où v_i est le vecteur correspondant au point i , et où $a_1, a_2, a_3 > 0$. Le cocircuit $1\bar{3}\bar{5}$ est obtenu en considérant la droite passant par les points 2, 4, 6, qui sépare le point 1 des points 3 et 5. Les bases ordonnées $(1, 2, 4)$, $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 5)$ ont même chirotope, opposé à celui des bases ordonnées $(1, 4, 2)$, $(2, 1, 4)$ ou $(3, 4, 5)$, comme on le voit sur les sens de parcours des triangles correspondant. La Section suivante 3.1.4 illustre des propriétés géométriques plus raffinées sur ce même exemple.

Signalons enfin que le point de vue dual au sens de l'algèbre linéaire sur une configuration de vecteurs conduit aux arrangements d'hyperplans (chaque vecteur est considéré comme une forme linéaire, dont le noyau est un hyperplan), voir Section 3.3.5.

3.1.4 Quelques propriétés géométriques codées par le matroïde orienté d'une configuration de points

Soit E un ensemble de points affines définissant le matroïde orienté M . On note $\text{conv}(E)$ l'enveloppe convexe de E . Les propriétés suivantes peuvent être vérifiées à partir des définitions.

Partitions de Radon. Une partition de $\underline{X} \subseteq E$ en $\underline{X} = (X^+, X^-)$ est une *partition de Radon* si l'enveloppe convexe de X^+ et celle de X^- ont une intersection non vide : $\text{conv}(X^+) \cap \text{conv}(X^-) \neq \emptyset$.

Soit C un circuit du matroïde orienté. Alors la partition de \underline{C} en C^+ et C^- est l'unique partition de Radon de \underline{C} .

Plus généralement, les partitions de Radon de parties \underline{X} de E sont exactement les parties signées obtenues par compositions (ou par compositions conformes, voir Section 3.2.1) successives quelconques à partir de l'ensemble des circuits. Elles forment l'ensemble \mathcal{V} des *vecteurs* de M .

Exemple 3.7. Sur la Figure 10, le circuit $1\bar{2}3$ indique que le point 2 appartient au segment $[1, 3]$, et le vecteur $\bar{2}34\bar{5}$ indique que les segments $[2, 5]$ et $[3, 4]$ se coupent (voir Figure 12 pour la liste des vecteurs).

Séparations par des hyperplans quelconques. On a défini un cocircuit (C^+, C^-) comme la partition de $E \setminus H$ induite par les deux demi-espaces délimités par un hyperplan H de l'espace, avec la condition que H soit engendré par des points de E .

Plus généralement, les partitions (X^+, X^-) de $\underline{X} = E \setminus H$ induites par les deux demi-espaces délimités par un hyperplan H quelconque de l'espace sont exactement les parties signées obtenues par compositions (ou par compositions conformes, voir Section 3.2.1) successives quelconques à partir de l'ensemble des cocircuits. Elles forment l'ensemble \mathcal{V}^* des *covecteurs* de M .

Exemple 3.8. Sur la Figure 10, le covecteur $12\bar{3}46$ s'obtient en considérant une droite passant par 5 et séparant 3 des autres points (voir Figure 9 pour la liste des covecteurs).

Enveloppe convexe. Un hyperplan de l'espace contient une face de $\text{conv}(E)$ (c.-à-d. une face extrême de dimension maximale) si et seulement si son complémentaire dans E induit un cocircuit positif de M . Remarquons que ceci est un cas particulier de la propriété ci-dessus de séparation par des hyperplans.

Un point $e \in E$ est extrémal dans $\text{conv}(E)$ si et seulement si il n'existe pas un circuit C avec $C^+ = \{e\}$. En effet, si $C^+ = \{e\}$ pour un circuit C , alors $e \in \text{conv}(C^-)$ d'après la propriété des partitions de Radon ci-dessus, c'est-à-dire que e est un point intérieur, c'est-à-dire non-extrémal.

Exemple 3.9. Sur la Figure 10, le cocircuit positif 12A indique que les points 3, 5, 6 sont portés par un face de l'enveloppe convexe. La liste des circuits montre que les sommets 1, 3, 6 sont extrémaux dans l'enveloppe convexe.

Visibilité entre deux points à travers un triangle. Soient a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 cinq points distincts de E en position générale en rang 4. La propriété que le segment d'extrémités b_1, b_2 coupe ou non l'intérieur du triangle de sommets a_1, a_2, a_3 est codée par M . C'est en effet le cas si et seulement si :

- (i) b_1 et b_2 sont de signes opposés dans l'un ou l'autre des cocircuits opposés définis par l'hyperplan engendré par a_1, a_2, a_3 ;
- (ii) b_i et a_k sont de même signe dans l'un ou l'autre des deux cocircuits opposés définis par l'hyperplan engendré par b_j, a_l, a_m , pour tout $\{i, j\} = \{1, 2\}$ et $\{k, l, m\} = \{1, 2, 3\}$.

Des propriétés plus raffinées de ce type peuvent facilement être établies.

3.2 Matroïdes orientés : définition combinatoire.

Les axiomatiques des circuits et vecteurs s'appliquent de la même façon, respectivement, aux cocircuits et covecteurs via le dual défini après.

3.2.1 Axiomatiques des parties signées

Un ensemble de parties signées \mathcal{C} d'un ensemble fini est l'ensemble des circuits (ou des cocircuits) d'un matroïde orienté si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées. Le matroïde orienté est alors déterminé par l'ensemble des circuits (ou des cocircuits).

- (i) $\emptyset \notin \mathcal{C}$;
- (ii) (symétrie) $\mathcal{C} = -\mathcal{C}$;
- (iii) (incomparabilité) pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$ si $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$ alors $X = Y$ ou $X = -Y$;
- (iv) (élimination forte des circuits) pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$, $X \neq Y$, $e \in X^+ \cap Y^-$ et $f \in (X^+ \setminus Y^-) \cup (X^- \setminus Y^+)$, il existe $Z \in \mathcal{C}$ tel que
 - $Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) - e$,
 - $Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) - e$,
 - et $f \in \underline{Z}$.

Remarque 3.10. Dans le cas vectoriel, l'axiome (iv) se montre en éliminant e des deux relations de dépendance linéaire définissant les circuits.

Si l'on ne tient pas compte des signes, les conditions obtenues sont l'axiomatique des circuits d'un matroïde (cf. Section 2.1.2). Le matroïde dont les circuits sont les supports des circuits d'un matroïde orienté est appelé *matroïde sous-jacent* de ce matroïde orienté.

Un ensemble \mathcal{V} de parties signées d'un ensemble fini est l'ensemble des *vecteurs* (ou des *covecteurs*) d'un matroïde orienté si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées. Le matroïde orienté est alors déterminé par l'ensemble des vecteurs (ou des covecteurs).

- (i) $\emptyset \in \mathcal{V}$;
- (ii) (*symétrie*) $\mathcal{V} = -\mathcal{V}$;
- (iii) (*composition*) pour tout $X, Y \in \mathcal{V}$ on a $X \circ Y \in \mathcal{V}$;
- (iv) (*élimination forte des vecteurs*) pour tout $X, Y \in \mathcal{V}$, $e \in X^+ \cap Y^-$ et $f \in (\underline{X} \setminus \underline{Y}) \cup (\underline{Y} \setminus \underline{X}) \cup (X^+ \cap Y^+) \cup (X^- \cap Y^-)$, il existe $Z \in \mathcal{V}$ tel que
 - $Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) - e$,
 - $Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) - e$,
 - et $f \in Z$.

Etant données deux parties signées $A = (A^+, A^-)$ et $B = (B^+, B^-)$, on définit la *composition* $A \circ B = (A^+ \cup (B^+ \setminus \underline{A}), A^- \cup (B^- \setminus \underline{A}))$. Autrement dit : $A \circ B$ a pour support $\underline{A} \cup \underline{B}$, les éléments de A étant signés comme dans A , et les autres comme dans B .

Si A et B ont les mêmes signes sur leurs éléments communs, on dit que $A \circ B$ est une *composition conforme*.

Deux vecteurs (resp. covecteurs) sont *conformes* si ils ont les mêmes signes sur leurs éléments communs (c'est-à-dire, géométriquement, si les faces correspondantes se touchent, cf. Section 3.3.2).

Un résultat fondamental est le suivant : l'ensemble des vecteurs (resp. covecteurs) est engendré par composition conforme à partir de l'ensemble des circuits (resp. cocircuits). Réciproquement, les circuits, resp. cocircuits, sont les vecteurs, resp. covecteurs, minimaux pour l'inclusion.

3.2.2 Dualité

On dit que deux parties signées X et Y sont *orthogonales* si $(X^+ \cap Y^+) \cup (X^+ \cap Y^-) \neq \emptyset$ et $(X^- \cap Y^+) \cup (X^- \cap Y^-) \neq \emptyset$ dès que $\underline{X} \cap \underline{Y} \neq \emptyset$.

Le théorème fondamental de la dualité des matroïdes orientés s'écrit comme suit. *L'ensemble des parties signées orthogonales à tous les vecteurs (resp. covecteurs), est égal à l'ensemble des parties signées orthogonales à tous les circuits (resp. cocircuits). C'est l'ensemble des vecteurs (resp. covecteurs) d'un matroïde orienté sur E .*

Ce matroïde orienté est le *dual* de M , noté M^* .

Ce résultat est un fort résultat combinatoire, puisqu'il caractérise la relation liant les circuits et les cocircuits, qui satisfont par ailleurs la même axiomatique. Ceci garantit l'existence d'une dualité dans les matroïdes orientés. La dualité est un intérêt fondamental de cette théorie. Le matroïde sous-jacent du dual est le matroïde dual de celui de M (voir Section 2.3). L'ensemble des covecteurs (resp. vecteurs) de M^* est l'ensemble des vecteurs (resp. covecteurs) de M . L'ensemble des cocircuits (resp. circuits) de M^* est l'ensemble des circuits (resp. cocircuits) de M . On peut noter aussi que les supports des covecteurs sont les complémentaires des fermés du matroïde sous-jacent (cf. Section 2.1.5).

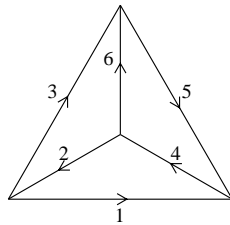


FIGURE 11 – Dual de K_4 (pour l'orientation de référence). Voir Figure 5 pour dualité des graphes planaires.

Remarque 3.11. *Le matroïde orienté dual d'un matroïde orienté réalisable est aussi réalisable. Une matrice représentative du dual se construit facilement à partir de celle du primal, la construction est la même que dans le matroïde sous-jacent, voir Remarque 2.14.*

Le matroïde orienté dual d'une configuration de points affine est réalisable mais pas comme configuration de points affine : il est acyclique donc son dual ne l'est pas (il est totalement cyclique, voir Section 3.2.4).

Pour un graphe orienté planaire, les notions de dualité coïncident : le matroïde orienté du dual du graphe est le dual du matroïde orienté du graphe.

Exemple 3.12. *La Figure 11 montre le dual de la Figure 8. Ses covecteurs apparaissent sur la Figure 12.*

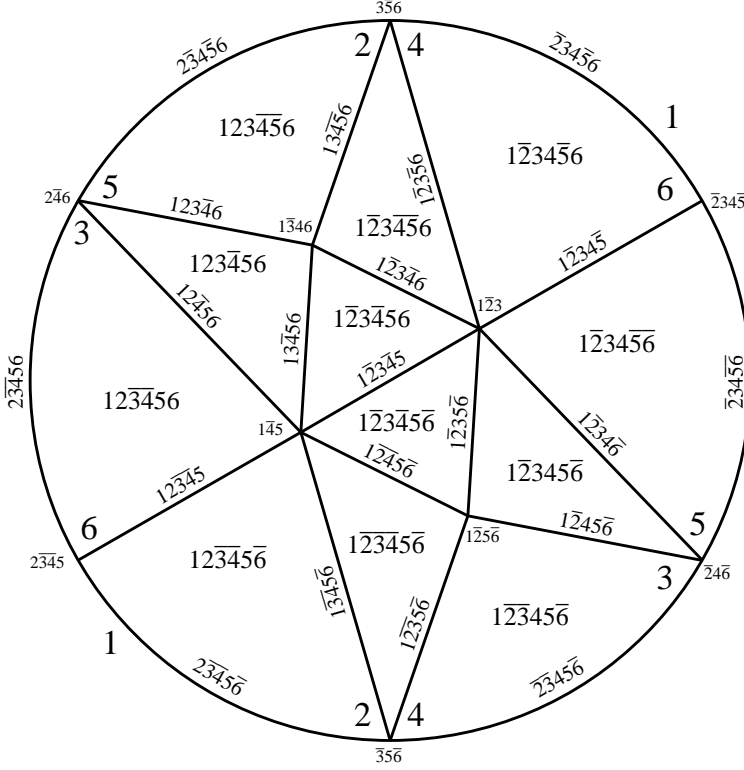


FIGURE 12 – Vecteurs de K_4 (pour l'orientation de référence).

3.2.3 Axiomatique des bases et chirotopes

Un ensemble \mathcal{B} de parties de cardinal r d'un ensemble fini E est l'ensemble des *bases* d'un matroïde orienté si et seulement si il existe une application appelée *chirotope* $\chi : E^r \rightarrow \{+, -, 0\}$ telle que les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\mathcal{B} \neq \emptyset$;
- (ii) (*propriété d'échange*) pour tous B et B' dans \mathcal{B} et $e \in B \setminus B'$, il existe $f \in B' \setminus B$, tel que $B \setminus e \cup f \in \mathcal{B}$;
- (iii) $\{b_1, \dots, b_r\} \in \mathcal{B}$ si et seulement si $\chi(b_1, \dots, b_r) \neq 0$;
- (iv) (*alternance*) χ est alternante, c.-à-d. $\chi(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(r)}) = \text{sign}(\sigma)\chi(b_1, \dots, b_r)$ pour tous $b_1, \dots, b_r \in E$ et toute permutation σ ;
- (v) (*relations de Grassmann-Plücker à trois termes*) pour tous $b_1, \dots, b_r, x, y \in E$, si $\chi(x, b_2, \dots, b_r)\chi(b_1, y, b_3, \dots, b_r) \geq 0$ et $\chi(y, b_2, \dots, b_r)\chi(x, b_1, b_3, \dots, b_r) \geq 0$

alors $\chi(b_1, b_2, \dots, b_r)\chi(x, y, b_3, \dots, b_r) \geq 0$.

Bien sûr, si on oublie les signes, les bases sont celles du matroïde sous-jacent (cf. Section 2.1.3).

Remarque 3.13. Dans le cas réalisable, l'axiome (v) se vérifie directement avec les relations de Grassmann-Plücker, dont il est une formulation combinatoire :

$$\det(b_1, \dots, b_r) \cdot \det(b'_1, \dots, b'_r) = \sum_{1 \leq i \leq r} \det(b'_i, b_2, \dots, b_r) \cdot \det(b'_1, \dots, b'_{i-1}, b_1, b'_{i+1}, \dots, b'_r).$$

Des circuits aux bases et des bases aux circuits. Comme dans le matroïde sous-jacent, les bases sont les parties de taille maximale ne contenant pas de circuit, et les supports des circuits sont les plus petites parties contenues dans aucune base. Les signes sont déterminés par la relation suivante :

$$\chi(y, b_2, \dots, b_r) = -C(e)C(f)\chi(x, b_2, \dots, b_r),$$

où $\{x, b_2, \dots, b_r\}$ et $\{y, b_2, \dots, b_r\}$ sont deux bases avec $x \neq y$, $C(a)$ désigne le signe de a dans C , et C est l'un des deux circuits opposés contenus dans $\{x, y, b_2, \dots, b_r\}$.

3.2.4 Notions importantes

Orientabilité. Un matroïde qui est le matroïde sous-jacent d'un matroïde orienté est dit *orientable*. Il existe des matroïdes qui ne sont le matroïde sous-jacent d'aucun matroïde orienté, ils sont dits *non-orientables* : par exemple le matroïde de Fano (voir Figure 6) est non orientable. Signalons que tester l'orientabilité d'un matroïde est un problème NP-complet [16].

Acyclique, totalement cyclique. Un matroïde orienté est *acyclique*, resp. *totalement cyclique*, si il n'a pas de circuit positif, resp. pas de cocircuit positif, ou de façon équivalente si tout élément appartient à un cocircuit positif, resp. à un circuit positif (voir aussi Section 2.9.4 sur l'énumération de ces réorientations, Section 3.3.3 sur la bijection canonique avec les régions d'un arrangement, et Section 3.4.2 sur l'équivalence des définitions données ici).

Réorientation. La réorientation de M selon A est le matroïde orienté, noté $-_A M$, ayant pour ensemble de circuits les circuits de M dans lesquels on change le signe des éléments de A (de même en termes de vecteurs, de cocircuits ou de covecteurs). Toutes les réorientations de M forment sa *classe de réorientations*. Elles ont toutes le même matroïde sous-jacent.

Remarque 3.14. Si M est défini à partir d'un ensemble de vecteurs réels, réorienter un vecteur revient à le remplacer par son opposé. Si M est défini à partir d'une configuration de points affines, alors aucun circuit n'est positif, et M est dit acyclique. Réorienter un élément revient à faire une transformation projective de la configuration à partir de cet élément. Si le point est extrémal, la configuration reste représentable par une configuration affine. Sinon elle n'est plus acyclique et nécessite une représentation vectorielle dans un espace dont la dimension est augmentée de 1.

Remarque 3.15. Si M est défini à partir d'un graphe orienté, réorienter un élément revient à changer l'orientation de cette arête du graphe. Dans le cas graphique, les réorientations du matroïde orienté correspondant sont en bijection canonique avec les orientations du graphe : il y a une seule "classe de réorientation" pour un graphe donné en tant que matroïde orienté. Autrement dit, deux matroïdes orientés définis par ce graphe sont des réorientations l'un de l'autre, contrairement aux matroïdes généraux pour lesquels un même matroïde peut être le matroïde sous-jacent de plusieurs matroïdes orientés qui ne sont pas des réorientations les uns des autres. Le cas uniforme en est l'exemple typique : il y a de nombreuses façons d'avoir des points en position générale dans l'espace qui ne soient pas transformations projectives les unes des autres.

Mineurs. Les mineurs d'un matroïde orientés ont pour matroïde sous-jacent les mineurs correspondant du matroïde sous-jacent (voir Section 2.5). Les propriétés sont très similaires. Les signes des éléments restant des circuits et des cocircuits obtenus sont inchangés.

Précisément, soit M un matroïde orienté sur E , et $A \subseteq E$. Les cocircuits de M/A (resp. circuits de $M \setminus A$) sont les cocircuits de M (resp. circuits de M) d'intersection vide avec A . Les circuits de M/A (resp. cocircuits de $M \setminus A$) sont les parties minimales dans l'ensemble des circuits de M (resp. cocircuits de M) auxquels on enlève A . On a alors $(M/A)^* = M^* \setminus A$, et $(M \setminus A)^* = M^*/A$. Soient A et B deux parties disjointes de E , alors $M/A \setminus B = M \setminus B/A$.

Remarque 3.16. Dans un matroïde graphique, les notions de mineurs coïncident encore avec celles des graphes.

Géométriquement, dans un arrangement de pseudosphères (voir Section 3.3), la suppression revient à supprimer les pseudosphères correspondantes. L'arrangement obtenu n'est peut-être alors plus essentiel (par exemple supprimer un isthme fait perdre 1 au rang).

La contraction revient à considérer l'arrangement induit sur l'intersection des pseudosphères contractées, celles qui contenaient cette intersection étant transformées en boucles, certaines pseudosphères peuvent se retrouver "superposées" : leur paire forme un circuit dans le contracté.

3.3 Matroïdes orientés : définition topologique

Les matroïdes orientés sont représentés par des objets topologiques, qu'ils modélisent de façon combinatoire : les arrangements de pseudosphères.

Historiquement, les matroïdes orientés sont définis avec les axiomatiques combinatoires de la partie précédente, et le *théorème de représentation topologique* est le résultat fondamental montrant que l'on peut les définir de façon topologique comme dans la présente partie. Un intérêt des matroïdes orientés est que l'ensemble des circuits et des vecteurs, ou des cocircuits et des covecteurs, vérifient une axiomatique (assez courte, de surcroît), c'est-à-dire que l'on sait caractériser (de façon combinatoire) les ensembles de parties signées pouvant correspondre aux faces d'un arrangement de pseudosphères.

Pour l'intuition, les deux points de vue – combinatoire et topologique – se complètent bien. Notamment, d'un côté la plupart des résultats et objets usuels dans les matroïdes orientés ont des interprétations géométriques remarquables ; d'un autre côté le point de vue combinatoire permet d'utiliser facilement la dualité alors qu'elle est moins évidente topologiquement.

3.3.1 Arrangement de pseudosphères, matroïde orienté

On note S^d la sphère unité de l'espace réel de dimension $d+1$. On appelle *pseudosphère* de S^d une sphère S homéomorphe à S^{d-1} dans un homéomorphisme de S^d . Il y a alors deux composantes connexes dans $S^d \setminus S$, chacune homéomorphe à une boule de dimension d , que l'on appellera les *côtés* de S .

Un *arrangement de pseudosphères* est un ensemble fini \mathcal{A} de pseudosphères $S_e, e \in E$ de S^d vérifiant les conditions suivantes :

- (i) $S_A = \bigcap_{e \in A} S_e$ est une sphère, pour tout $A \subseteq E$;
- (ii) si $S_A \not\subseteq S_e$ pour $A \subseteq E, e \in E$, et S_e^+ et S_e^- sont les deux côtés de S_e alors $S_A \cap S_e$ est une pseudosphère de S_A ayant pour côtés $S_A \cap S_e^+$ et $S_A \cap S_e^-$.

Si $S_E = \emptyset$ l'arrangement est dit *essentiel*. On dit que l'arrangement est *signé* lorsque l'on choisit pour chaque pseudosphère $S_e, e \in E$, un côté positif S_e^+ et un côté négatif S_e^- .

Deux arrangements (resp. deux arrangements signés) sont *équivalents* si ils sont égaux à un homéomorphisme de S^d près (resp. si en plus l'homéomorphisme conserve les signes). On définit alors les *matroïdes orientés* de rang $d+1$ sans boucle comme étant les classes d'équivalence des arrangements de pseudosphères essentiels signés de S^d .

On peut ajouter à un matroïde orienté des éléments non représentés, appelés ses *boucles*. On a alors défini les matroïdes orientés en toute généralité. La *réorientation* d'un matroïde orienté M selon $A \subseteq E$ est le matroïde orienté obtenu en changeant les signes des pseudosphères S_e , $e \in A$. On le note $-_A M$.

3.3.2 Faces de l'arrangement, covecteurs du matroïde orienté

Les intersections des pseudosphères définissent des faces, et un complexe cellulaire de faces qui partitionne S^d . Considérer un arrangement signé permet de répertorier les positions relatives des faces par rapport aux éléments.

Etant donné un arrangement $\mathcal{A} = (S_e)_{e \in E}$ de pseudosphères de S^d représentant un matroïde orienté M , à chaque point a de S^d est associée une partie signée de E définie par $e \in A^+$ si et seulement si $a \in S_e^+$, et $e \in A^-$ si et seulement si $a \in S_e^-$. Ainsi $e \notin A$ si et seulement si $a \in S_e$. L'ensemble des parties signées ainsi obtenues est l'ensemble des *covecteurs* du matroïde orienté.

Autrement dit, l'ensemble des covecteurs s'obtient en considérant, pour chaque face, l'ensemble C des éléments qui ne contiennent pas cette face, et en attribuant à chaque élément e de C le signe du côté de S_e dans lequel la face est contenue.

Le célèbre *Théorème de représentation topologique*, de Folkman et Lawrence 1978 [9], peut s'énoncer ainsi : *les deux définitions, topologique et combinatoire, sont équivalentes.*

Ainsi, deux arrangements de pseudosphères signés sont (combinatoirement ou topologiquement) équivalents si et seulement si ils définissent le même ensemble de covecteurs. Remarquons qu'un matroïde orienté possède toujours une symétrie centrale combinatoire, dans le sens où l'ensemble des covecteurs est invariant par passage à l'opposé. On en déduit que la réorientation d'un matroïde orienté selon E tout entier est le même matroïde orienté. Cette symétrie fondamentale se retrouve dans la représentation topologique, comme dans toutes les axiomatiques.

Les *régions* sont les composantes connexes de $S^d \setminus \cup_{e \in E} S_e$. L'ensemble de toutes les régions des arrangements induits par \mathcal{A} sur toutes les intersections de pseudosphères, est l'ensemble des *faces* du complexe cellulaire défini par \mathcal{A} . Les régions sont les faces de dimension d , les intersections réduites à un point sont les faces de dimension 0.

L'ensemble des éléments contenant une face est appelé un *fermé* de M . Le *rang* r de M est $r = d + 1$. Si une face est de dimension k , le fermé correspondant est de *rang* $r - k - 1$. Les fermés sont les complémentaires des supports des covecteurs de M . Les fermés ne déterminent pas M , ils déterminent en fait le *matroïde sous-jacent* \underline{M} , ce qui revient à considérer l'ensemble des faces de l'arrangement (intersection de pseudosphères), mais sans s'occuper de leurs positions relatives, c'est-à-dire sans tenir compte des signes des covecteurs (voir Section 2.1.5). De même, les *bases* du matroïde orienté, qui sont les ensemble de r pseudosphères dont l'intersection est vide sont aussi une notion du matroïde sous-jacent (voir Section 2.1.3).

Les *cocircuits* sont les covecteurs correspondant aux faces de dimension 0, appelées aussi *sommets*, c'est-à-dire les intersections de pseudosphères réduites à un point, c'est-à-dire que les cocircuits ont pour supports les complémentaires des fermés de rang $r - 1$ (appelés hyperplans du matroïde). A un cocircuit du matroïde correspondent deux parties signées opposées, cocircuits du matroïde orienté (alors que pour les autres fermés, il peut y avoir de nombreux covecteurs ayant même support).

Dans le cas $d = 2$, on retrouve les arrangements de pseudodroites ou de pseudocercles, voir Section 3.1.2.

3.3.3 Régions, covecteurs maximaux, réorientations acycliques

Les *covecteurs maximaux* de M sont ceux dont le support est E moins les boucles éventuelles. Ils sont, par définition ici, en bijection canonique avec les régions de l'arrangement. Un matroïde orienté est dit *acyclique* s'il existe un covecteur maximal positif, c'est-à-dire si la signature des pseudosphères qui définit le matroïde orienté désigne une région. Autrement dit, cette région, intersection de tous les côtés positifs, définit un covecteur maximal positif.

Ainsi les régions de l'arrangement de pseudosphères (qui ne dépendent pas de la façon dont celles-ci sont signées) sont en *bijection canonique* avec les covecteurs maximaux du matroïde orienté (qui dépend lui d'une certaine signature de référence), et en *bijection canonique* avec les réorientations acycliques du matroïde orienté (qui reviennent à changer la signature de référence, tant que celle-ci désigne une région).

On emploie régulièrement et indifféremment, sauf ambiguïté, ces appellations.

Exemple 3.17. La Figure 13 montre les orientations acycliques de K_4 de la Figure 8, correspondant aux covecteurs de la Figure 9.

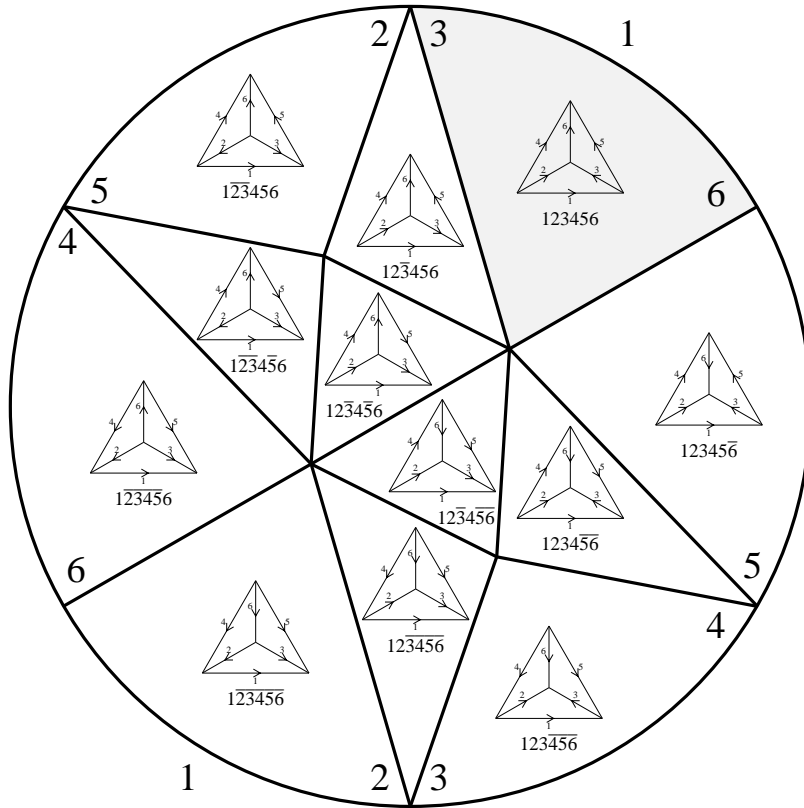


FIGURE 13 – (Ré)orientations acycliques, régions, et covecteurs maximaux de K_4 .

3.3.4 Dualité

Les réorientations donnant un vecteur maximal positif (au lieu d'un covecteur) sont les réorientations *totalelement cycliques* ou pour un graphe connexe les orientations *fortement connexes*. Ce sont les réorientations acycliques du dual (voir Section 3.4.2 pour les autres cas, sans covecteur positif ni vecteur positif).

Le théorème de dualité de la Section 3.2.2 est un fort résultat combinatoire, mais aussi topologique : étant donné un arrangement de pseudosphères de taille n et de rang r , il existe un arrangement de pseudosphères dual de taille n et de rang $n - r$ dont les covecteurs sont les parties signées maximales orthogonales à tous les covecteurs de l'arrangement donné.

Exemple 3.18. La Figure 11 représente le dual du graphe orienté K_4 de la Figure 8,

et la Figure 12 représente les covecteurs de ce graphe, qui sont les vecteurs du graphe de la Figure 8 : c'est l'ensemble des parties signées orthogonales à toutes les parties signées de la Figure 9.

3.3.5 Cas réel : arrangements d'hyperplans

Etant donné un ensemble fini d'hyperplans de dimension d , dans un espace vectoriel réel de dimension $d + 1$, l'intersection de ces hyperplans avec la sphère unité S^d de l'espace définit un arrangement de pseudosphères, et donc, en choisissant une signature de référence, un matroïde orienté.

Un tel matroïde orienté est dit *vectoriel* (sur \mathbb{R}) ou *réalisable*, ce qui est cohérent avec la définition vue précédemment (Section 3.1.3). Chaque hyperplan peut être vu comme le noyau d'une forme linéaire, celle-ci indiquant en plus un côté positif de l'hyperplan. Ces formes linéaires sont des vecteurs (dans l'espace vectoriel dual au sens de l'algèbre linéaire). Le matroïde orienté associé à l'arrangement d'hyperplans est le matroïde orienté associé à cet ensemble de vecteurs en tant que configuration de vecteurs.

Il existe des arrangements de pseudosphères ne venant pas d'arrangements d'hyperplans : non-Pappus, voir Figure 7 dans laquelle les éléments ne sont plus les points mais les neuf pseudodroites représentées.

On a déjà vu qu'il est actuellement hors de portée, probablement à jamais, de caractériser ceux qui viennent effectivement d'arrangements d'hyperplans, puisque cela revient à caractériser les matroïdes vectoriels sur \mathbb{R} (il y a notamment une infinité de mineurs exclus), voir Section 2.6. Le point de vue combinatoire ne tenant pas compte des distances, et les contraintes de réalisabilité étant profondément liées aux distances, il n'est pas étonnant que celles-ci disparaissent dans les matroïdes orientés et que l'on obtienne des objets plus généraux. Ainsi, l'étude des arrangements d'hyperplans à homéomorphisme près peut se faire dans le cadre des matroïdes orientés d'un point de vue purement combinatoire. D'autres objets dérivés, comme par exemple les *polytopes* qui correspondent à des régions dans un arrangement d'hyperplans, peuvent aussi être décrits dans ce cadre. Les matroïdes orientés peuvent être considérés comme un langage naturel pour étudier la structure de ces objets.

Remarque 3.19. Etant donné un graphe orienté $G = (V, E)$, en considérant l'ensemble des hyperplans d'équations $x_j - x_i = 0$, $(i, j) \in E$, où les vecteurs x_i , $i \in V$, forment une base de l'espace réel de dimension $|V|$, on définit un arrangement d'hyperplans (comme dans le cas non orienté, cf. Remarque 2.4). Une signature de l'arrangement étant le choix d'un demi-espace positif, d'équation $x_j > x_i$ ou $x_i > x_j$

pour tout couple $(i, j) \in E$, on choisit la signature de l'arrangement de façon cohérente avec l'orientation du graphe : $x_j > x_i$ pour l'arête (i, j) orientée de i vers j . Les réorientations du matroïde orienté sont en bijection canonique avec les orientations du graphe. Les régions de l'arrangement sont en bijection canonique avec les orientations acycliques du graphe.

Exemple 3.20. La Figure 13 représente l'arrangement de rang 3 de la Figure 9 correspondant à l'orientation du graphe K_4 de la Figure 8. Dans chaque région est représentée l'orientation acyclique correspondante du graphe. La région grisée est la région de référence (covecteur positif) à partir de laquelle sont signés tous les covecteurs.

3.4 Liens remarquables avec la programmation linéaire

3.4.1 Programmation linéaire dans les matroïdes orientés

Le problème fondamental de la programmation linéaire peut-être vu comme suit : étant donnée une région d'un espace (affine) délimitée par des hyperplans (affines), maximiser une forme linéaire (de l'espace vectoriel sous-jacent) sur cette région.

En termes classiques cela s'écrit : $\max c^t x - d, Ax \leq b, x \geq 0$, où A est une matrice réelle de taille $m \times n$, m étant le nombre d'inégalités, n la dimension du problème, x (la variable) et c sont des vecteurs de l'espace réel de dimension n , b un vecteur de l'espace réel de dimension m et d une constante réelle. Les inégalités à vérifier définissent des demi-espaces (affines) et leur intersection est une région délimitée par des hyperplans.

On sait que l'ensemble des solutions d'un tel problème si il est non vide est une face de la région (un sommet s'il y a une unique solution). Ce problème peut alors être modélisé de façon purement combinatoire dans les matroïdes orientés : les hyperplans considérés définissent un matroïde orienté M , les régions en étant les réorientations acycliques. On ajoute à ce matroïde orienté un élément g qui représente le *plan à l'infini*— on peut le voir comme une sphère à l'infini de l'espace affine sur laquelle les parallèles se coupent. Les régions bornées sont alors représentées par celles qui ne touchent pas g . On ajoute un autre élément f qui représente la *fonction objective*, c'est-à-dire la forme linéaire à optimiser, il représente le noyau de cette forme linéaire (hyperplan vectoriel) passant par un point quelconque de l'espace affine (donnant un hyperplan affine), et un demi-espace affine délimité par f est celui dans lequel f croît. On a ainsi défini un *programme de matroïde orienté* (M, g, f) .

Géométriquement, si deux sommets de la région considérée sont sur une même arête, elle est portée par une pseudodroite (face de dimension 1 ou fermé de rang $r - 2$ du matroïde). Cette pseudodroite coupe f . Supposons que cette intersection n'appartienne pas à g , c'est-à-dire que la pseudodroite ne soit pas parallèle à f . Un des deux sommets est alors "plus loin" que l'autre de f (et plus près de l'élément à l'infini g); il augmente la fonction à maximiser. Ceci s'exprime dans le matroïde orienté avec les signes des covecteurs portés par cette pseudodroite. Et ceci revient, globalement, à orienter (partiellement) le graphe d'adjacence des sommets (ou squelette) de la région considérée. Un sommet est *optimal* si il est sans arête sortante dans ce graphe et n'appartient pas à g (c.-à-d. il n'est pas à l'infini).

On peut vérifier que le *critère du simplexe*, classique en termes de matrices, et qui caractérise l'optimalité d'un sommet (dans une région bornée de dimension maximale), se formule naturellement en termes de ce matroïde orienté. Précisément, un sommet v intersection de e_1, \dots, e_{r-1} est optimal si la base $B = \{g, e_1, \dots, e_{r-1}\}$ est telle que : l'unique cocircuit contenu dans $(E \setminus B) \cup \{g\}$ avec g positif est positif sauf éventuellement sur f , et l'unique circuit contenu dans $B \cup \{f\}$ avec f positif est positif sauf éventuellement sur g . Ce critère d'optimalité reste valide dans les programmes de matroïdes orientés généraux.

La *dualité de la programmation linéaire* se formule aussi naturellement en termes de dualité dans ce matroïde orienté : le dual du programme (M, g, f) est simplement le programme (M^*, f, g) avec plan à l'infini f et fonction objective g dans M^* .

Enfin, il est naturel de vouloir généraliser aux matroïdes orientés la *méthode du simplexe* qui consiste à passer d'un sommet de la région à un autre adjacent de valeur supérieure pour la forme linéaire à maximiser (c'est-à-dire à parcourir le graphe du programme) et ce jusqu'à trouver un optimum (c.-à-d. un sommet sans arête sortante). Une grande partie des travaux effectués en programmation linéaire dans le cadre des matroïdes orientés a été de définir des méthodes similaires. Des adaptations efficaces de la méthode du simplexe réelle aux matroïdes orientés ont été étudiées par exemple par Bland, Edmonds, Fukuda (voir [2, Chapitre 10]).

La complication essentielle est que, contrairement au problème usuel dans l'espace vectoriel réel, le parcours des arêtes de la région peut tourner en rond : il peut y avoir des cycles de sommets "croissants". Ainsi la méthode du simplexe qui est assurée de fonctionner dans le cas réalisable, peut boucler en général dans un matroïde orienté. Cependant on montre qu'il existe toujours

malgré ceci une face optimale (“parallèle” à f) pour toute région bornée, et qu’elle satisfait le critère du simplexe énoncé plus haut. Un programme de matroïde orienté (M, g, f) dont le graphe n’a pas de tel cycle orienté est appelé *euclidien*. Tout programme de rang inférieur ou égal à 3 est euclidien, tout programme réalisable est euclidien. L’exemple non euclidien classique est $EFM(8)$ de rang 4 à 8 éléments (Edmonds, Fukuda, Mandel), voir [2, Section 10.4 p. 461].

3.4.2 Lemme de Farkas

La théorie des matroïdes orientés donne un cadre naturel au Lemme de Farkas, classique en programmation linéaire, le généralise, et le lie à un résultat classique de théorie des graphes.

Un résultat fondamental, appelé parfois *Lemme de Farkas pour les matroïdes orientés*, de Bland et Las Vergnas 1978 [3], s’énonce ainsi : *tout élément d’un matroïde orienté appartient soit à un circuit positif, soit à un cocircuit positif, mais pas les deux.*

Autrement dit, il existe une partition canonique des éléments d’un matroïde orienté,

$$E = F \uplus (E \setminus F),$$

où F est l’union de tous les circuits positifs et $E \setminus F$ est l’union de tous les cocircuits positifs. On peut montrer facilement que $M(F)$ est totalement cyclique, alors que M/F est acyclique.

Nous allons voir comment ce théorème fondamental s’interprète de différentes façons.

Graphe. Dans un graphe orienté, ce résultat – appelé parfois Lemme de Minty (1966) – n’est pas difficile à montrer².

On obtient : *toute arête d’un graphe orienté appartient soit à un cycle orienté, soit à un cocycle orienté, mais pas les deux.*

De même que dans un matroïde orienté, le graphe G/F obtenu en contractant l’union des cycles orientés de G est acyclique, alors que $G(F)$ est fortement connexe (si G connexe).

2. Indice donné dans [2] : si l’arête e n’est pas contenue dans un cycle orienté, alors l’ensemble des sommets depuis lesquels l’extrémité de e peut être atteinte par un chemin orienté forme un cocycle orienté contenant e

Arrangement de (pseudo-)hyperplans. On a vu qu'un matroïde orienté réalisable peut être représenté par un arrangement d'hyperplans (de pseudo-sphères dans le cas non-réalisable, mais l'interprétation est la même), chaque hyperplan séparant l'espace en un côté positif et un côté négatif.

L'intersection de tous les côtés positifs est une région R (un cône) de dimension d dans l'espace ambiant de dimension r . Géométriquement, le résultat en question signifie : *un hyperplan contient R si et seulement si il appartient à un circuit positif; et un hyperplan ne contient pas R si et seulement si il appartient à un cocircuit positif.*

Lorsque $d = r$, aucun hyperplan ne contient R , le matroïde orienté est acyclique, et tout élément appartient à un cocircuit positif. Lorsque $d = 0$, tous les hyperplans contiennent R , le matroïde orienté est totalement cyclique, et tout élément appartient à un circuit positif. Dans tous les cas, l'ensemble F des hyperplans qui contiennent R est l'union des circuits positifs.

Programmation linéaire et Lemme de Farkas. Ce paragraphe est à peu près directement traduit de [2, page 122]. Le célèbre *Lemme de Farkas* s'écrit comme suit. Soit $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$ une matrice réelle avec d lignes et n colonnes, et soit $b \in \mathbb{R}^{d \times 1}$ une des deux propositions suivantes est vraie mais pas les deux :

(i) il existe $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tel que $Ax = b$ et $x \geq 0$ (où $x \geq 0$ signifie que toutes les coordonnées de x sont positives) ;

(ii) il existe $y \in \mathbb{R}^{1 \times d}$ tel que $yA \geq 0$ et $yb < 0$.

Pour voir que le Lemme de Farkas se déduit du résultat général de Bland et Las Vergnas, soient e_1, e_2, \dots, e_{n+1} les colonnes de la matrice $A' = (A, -b) \in \mathbb{R}^{d \times (n+1)}$. Soit V l'espace engendré par les e_i et soit M le matroïde orienté des dépendances linéaires des e_i dans \mathbb{R} . On a (i) si et seulement si $(x, 1) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$ est linéairement dépendant des e_i , c'est-à-dire si et seulement si il existe un vecteur à coordonnées positives ou nulles dans V dont la $(n+1)$ -ème coordonnée est strictement positive. Ceci est équivalent à l'existence d'un circuit positif dans M contenant e_{n+1} .

Par ailleurs, on a (ii) si et seulement si le vecteur $yA' \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$ a ses coordonnées positives ou nulles, avec la $(n+1)$ -ème coordonnée strictement positive. Alors on a $yA' \in V^\perp$, l'espace engendré par les lignes de la matrice A' . Puisque le matroïde orienté des dépendances linéaires de ces lignes est le dual de M , on a (ii) si et seulement si il existe un cocircuit positif de M contenant e_{n+1} .

Il est intéressant de constater que les différents résultats présentés ici sont des points de vue différents sur un résultat qui s'exprime naturellement en termes de matroïdes orientés.

Références

- [1] G. Birkhoff. A determinant formula for the number of ways of coloring a map. *Annals of Mathematics*, 14(2) :42–46, 1912–13.
- [2] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, and G. Ziegler. *Oriented Matroids*. volume 46 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 1999.
- [3] R. Bland and M. Las Vergnas. Orientability of matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 24 :94–123, 1978.
- [4] T. Brylawski and J. Oxley. The tutte polynomial and its applications. In *Matroid Applications* (ed. N. White), Cambridge University Press, pages 123–225, 1992.
- [5] H. Crapo. A higher invariant for matroids. *Journal of Combinatorial Theory*, 2 :406–417, 1967.
- [6] H. Crapo. The Tutte polynomial. *Aequationes Mathematicae*, 3 :211–229, 1969.
- [7] J. Edmonds. Lehman’s switching game and a theorem of tutte and nash-williams. *Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*.
- [8] J. Edmonds. Submodular functions, matroids and certain polyhedra. In *Combinatorial structures and their applications*, (Proc. Calgary Internat. Conf.), pages 69–87, 1969.
- [9] J. Folkman and J. Lawrence. Oriented matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 25 :199–236, 1978.
- [10] J. Geelen, A. Gerards, and A. Kapoor. The excluded minors for GF(4)-representable matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 79(2) :247–299, 2000.
- [11] D. Hughes and P. F. *Projective Planes*. Springer-Verlag, New York, 1973.
- [12] J. Kahn and P. Seymour. On forbidden minors for GF(3). *Proceedings of the American Mathematical Society*, 102(2) :437–440, 1988.
- [13] M. Las Vergnas. The Tutte polynomial of a morphism of matroids ii. activities of orientations. In *Progress in Graph Theory* (Proc. Waterloo Silver Jubilee Conf. 1982), Academic Press, Toronto, Canada, pages 367–380, 1984.
- [14] C. Nash-Williams. An application of matroids to graph theory. In *Theory of graphs* (Int. Sympos. Rome), pages 363–365. Dunod Paris, 1966.
- [15] J. Oxley. *Matroid theory*. Oxford University Press, 1992.

- [16] J. Richter-Gebert. Testing orientability for matroids is NP-complete. *Advances in Applied Mathematics (Special issue "in the honor of Henry Crapo", ed. J. Kung)*, 23 :78–90, 1999.
- [17] P. Seymour. Decomposition of regular matroid. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 28 :305–359, 1980.
- [18] R. Stanley. Acyclic orientations of graphs. *Discrete Mathematics*, 5 :171–178, 1973.
- [19] R. Stanley. A zonotope associated with graphical degree sequences. In *Volume 4 DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, pages 555–570, 1991.
- [20] W. Tutte. A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canadian Journal of Mathematics*, 6 :80–91, 1954.
- [21] W. Tutte. A homotopy theorem for matroids i. *Transactions of the American Mathematical Society*, 88 :144–160, 1958.
- [22] W. Tutte. A homotopy theorem for matroids ii. *Transactions of the American Mathematical Society*, 88 :161–174, 1958.
- [23] H. Whitney. On the abstract properties of linear dependence. *American Journal of Mathematics*, 57 :509–533, 1935.
- [24] R. Winder. Partitions of n-space by hyperplanes. *SIAM Journal Applied Mathematics*, 14 :811–818, 1966.

Index

- algorithme
 - glouton, 8
- enveloppe convexe, 31
- graphe
 - coupe-cycle d'un, 5, 11
 - mineur de, 14
 - orienté, 25
- matrice totalement unimodulaire, 17
- matroïde, 4
 - base, 6
 - circuit, 4
 - cobase, 10
 - cocircuit, 10
 - cocycle, 11
 - connexe, 12
 - contraction, 12
 - de Fano, 15
 - dual, 10
 - fermeture, 7, 40
 - graphique, 5
 - hyperplan, 8
 - intersection, 18
 - mineur, 13
 - non-Pappus, 16
 - orientable, 36
 - régulier, 16
 - rang, 7
 - somme directe, 12
 - suppression, 12
 - transversal, 9
 - uniforme, 13
 - union, 18
 - vectorel, 4
- matroïde orienté
 - acyclique, 23, 26, 36, 40, 45
 - arrangement d'hyperplans, 42
 - arrangement de pseudodroites, 26
 - arrangement de pseudosphères, 38
 - base, chirotope, 29, 35, 40
 - circuit, 25, 29, 32
 - cocircuit, 25, 27, 29, 32, 40
 - composition conforme, 33
 - configuration de points, 30
 - covecteur, 27, 33, 39
 - covecteur maximal, 40
 - dual, 34
 - graphique, 25
 - lemme de Farkas généralisé, 45
 - matroïde sous-jacent, 33
 - mineur, 37
 - orthogonalité, 26, 33
 - partie signée, 24
 - partition de Radon, 31
 - pseudosphère, 27, 38
 - réalisable, 28, 42
 - région, 39, 40
 - réorientation, 36, 39
 - totalment cyclique, 23, 26, 36, 41, 45
 - vecteur, 33
 - vectorel, 28, 42
- polynôme chromatique, 21
- polynôme chromatique avec défaut, 21
- polynôme d'Ehrhart, 22
- polynôme de Tutte, 19
- polynôme des flots, 21
- polytope, 42
- problème d'assignation de tâches, 9
- programmation linéaire, 43
 - lemme de Farkas, 45

simplexe
méthode du, 44
orientation de, 30